8 Übung zur Physik II - Blatt 8

Benedikt Birkenbach (3699455)
Gruppe 2
Philipp Messer

8.1 Magnetisches Moment

Um die Formel herzuleiten, benutzen wir, daß die Rotation des Vektorpotentials dem magnetischen Feld entspricht.

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})$$

Das Vektorpotential können wir umformen.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

Mit Hilfe der Rechenregeln von Blatt 3 können wir jetzt die Rotation bestimmen.

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\underbrace{\vec{m}\left(\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\right) \cdot \vec{r} + \frac{1}{r^3}(\vec{\nabla} \cdot \vec{r})\right)}_{=0} + \underbrace{\left(\left(\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{\nabla}\right) \cdot \vec{m}\right)}_{=0}\right] \\
&- \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\underbrace{\left(\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{m}\right)\right)}_{=0} - \left(\left(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\right)\vec{r} + \frac{1}{r^3}((\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{r})\right)\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[-\left(\left(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\right)\vec{r} + \frac{1}{r^3}((\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{r})\right)\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{m_x x^2 + m_y y + m_z z}{r^2} \\ \frac{m_x x + m_y y^2 + m_z z}{r^2} \\ \frac{m_x x + m_y y + m_z z^2}{r^2} \end{pmatrix}}_{(\vec{m}\cdot\vec{e}_r)\vec{e}_r} - \underbrace{\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}}_{\vec{m}}\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{m}}{r^3}
\end{aligned}$$

8.2 Stromdurchflossener Ring

(a) Wir berechnen $\vec{B}(0,0,z)$ mit Hilfe von

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Der Vektor $\vec{r}'$ zeigt auf die jeweilige Ladungsverteilung und der Vektor $\vec{r}$ ist der Ortsvektor.

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Mit $d\vec{s} = Rd\varphi\vec{e}_\varphi$ und

$$\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ R \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}^3} \begin{pmatrix} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ R \end{pmatrix} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{R^2 2\pi}{\sqrt{R^2+z^2}^3} \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\sqrt{R^2+z^2}^3} \cdot \vec{e}_z$$

(b) Wir berechnen das magnetische Moment mit Hilfe der Formel

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int dV \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})$$

Wobei

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{1}{2} \int dV \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) \\ &= -\frac{1}{2} I \int d\vec{s} \times \vec{r} \\ &= -\frac{1}{2} IR \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\ &= -\frac{1}{2} IR \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix} d\varphi \\ &= I\pi R^2 \vec{e}_z \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir das errechnete Moment in die Gleichung aus Aufgabe 8.1 ein.

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\left[\begin{pmatrix}0\\0\\I\pi R^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]\cdot t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\I\pi R^2\end{pmatrix}}{z^3} = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 I}{z^3}\vec{e}_z$$

(b) Damit sich die beiden Ergebnisse nur noch um höchstens 1% unterscheiden, muss gelten

$$\frac{B_{\text{Aufg. a}}}{B_{\text{Aufg. b}}} < 0.01$$

$$\begin{aligned}
\frac{z^3}{\sqrt{R^2+z^2}^3} &\leq 0,01 \\
\frac{z^3}{R^3\sqrt{1+\frac{z^2}{R^2}}^3} &\leq 0,01 \\
\underbrace{\frac{z^3}{R^3}}_{:=x^3} &\leq 0,01\cdot\sqrt{1+\frac{z^2}{R^2}}^3 \\
x^3 &\leq 0,01\cdot\sqrt{1+x^2}^3 \\
x &\leq 0,2154\cdot\sqrt{1+x^2} \\
x^2 &\leq 0,04642\cdot(1+x^2) \\
x^2 &\leq 0,04642 + 0,04642\cdot x^2 \\
0,954x^2 &\leq 0,04642 \\
x^2 &\leq \frac{0,04642}{0,954} \\
x &\leq 0,2206
\end{aligned}$$

8.3 Rotierende Ladungskugel

(a) Berechnung des magnetischen Moments. Die Stromdichte ist gegeben durch

$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho\cdot\vec{v}$$

mit der Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

Wir bestimmen das magnetische Moment mit Hilfe der Formel

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int dV\,\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})$$

Dadurch ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\vec{m} &= \frac{1}{2}\rho \int dV \vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \\
&= \frac{1}{2}\rho \int dV \vec{\omega}\,(\vec{r}\cdot\vec{r}) - \vec{r}\,(\vec{r}\cdot\vec{\omega}) \\
&= \frac{1}{2}\rho \int dV \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z r^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} xz\omega_z \\ yz\omega_z \\ z^2\omega_z \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2}\rho \int dV \begin{pmatrix} -xz\omega_z \\ -yz\omega_z \\ \omega_z(x^2+y^2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\rho\omega_z \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} r^4 \begin{pmatrix} -\cos\vartheta \sin^2\vartheta \cos\varphi \\ -\sin\varphi \sin^2\vartheta \cos\vartheta \\ \sin^3\vartheta \end{pmatrix} dr d\varphi d\vartheta \\
&= \omega_z \pi \frac{1}{5} R^5 \rho \left[-\cos\vartheta + \frac{1}{3}\cos^3\vartheta \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{4}{15}\pi\omega_z R^5 \rho \\
&= \frac{1}{5} Q\omega_z R^2
\end{aligned}
$$

(b) Berechnung der maximalen Geschwindigkeit des Elektrons an der Kugeloberfläche. Wir stellen die Gleichung nach v um, setzen alles ein und rechnen es aus.

$$v = \frac{5m}{R \cdot e}$$

$$v = \frac{5 \cdot 9,3 \times 10^{-24}}{1,7 \times 10^{-15} \cdot 1,602 \times 10^{-19}} \frac{m}{s} = 1,707 \times 10^{11} \frac{m}{s}$$

Im Vergleich hierzu ist die Lichtgeschwindigkeit mit $3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ wesentlich kleiner. Wir können also sagen, daß das Modell falsch ist, da sich nichts schneller als Licht bewegen sollte. Der klassische Elektronenradius heißt nicht umsonst klassisch ;-)