5 Übung zur Physik II - Blatt 5

Benedikt Birkenbach (3699455)
Gruppe 2
Philipp Messer

5.1 Kugelladung

(a) Berechnung des elektrischen Feldes
Als erstes berechnen wir das Feld außerhalb der Kugel. Es gilt

$$\int_{\partial V} \vec{E}(\vec{r})d\vec{f} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})dV$$

nach dem Gauß'schen Integralsatz. Das Feld ist radialsymmetrisch, weshalb gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) = f(\vec{r}) \cdot \vec{e}_r$$

mit $\vec{e}_r$ als radialen Einheitsvektor. Mit Hilfe der Maxwell'schen Gleichung ergibt sich

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Jetzt können wir die Integrale bestimmen und nach $f(\vec{r})$ auflösen.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V} f(\vec{r}) \cdot \vec{e}_r \cdot d\vec{f} &= \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \\
f(\vec{r}) \int_{\partial V} \vec{e}_r \cdot d\vec{f} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_V dV \\
f(\vec{r}) \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} r^2 \sin\vartheta d\varphi d\vartheta &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3 \\
f(\vec{r}) \cdot 4\pi r^2 &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3 \\
f(\vec{r}) &= \frac{1}{3} \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2}
\end{aligned}$$

Mit $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$ ergibt sich schließlich

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r$$

für $r > R$.
Wir möchten jetzt das Feld für $r < R$ bestimmen. Hierfür müssen wir Q' bestimmen.

$$Q' = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{3Q}{4\pi R^3} = \frac{r^3}{R^3} Q$$

Da der Gauß'sche Integralsatz und die Maxwell'sche Gleichung weiterhin gültig sind, gilt

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) \cdot 4\pi r^2 &= \frac{1}{\epsilon_0}\frac{r^3}{R^3}Q \\ f(\vec{r}) &= \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \end{aligned}$$

wodurch sich schließlich

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot \vec{e}_r$$

für $r < R$ ergibt.

(b) Berechnung des elektrostatischen Potentiales
Da die Äquipotentialflächen (die Flächen mit gleichem Potential) wegen des radialen elektrischen Feldes wie Kugelschalen um die Ladungsverteilung angeordnet sind, ist das Potential nur von dem Radius (bzw. der Entfernung vom Mittelpunkt der Ladungsverteilung) abhängig. Daher gilt

$$\phi(\vec{r}) = -\int \vec{E}(\vec{r})d\vec{r}$$

Das Potential außerhalb der Kugel ($r > R$) kann man durch Lösen des Integrales und Beachtung der Randbedingung berechnen.

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= -\int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + K \end{aligned}$$

Mit der Randbedingung $\lim_{r\to\infty} \phi(r) = 0$ ergibt sich

$$\lim_{r\to\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + K = K = 0$$

und somit das Potential für $r > R$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Jetzt müssen wir noch das Potential innerhalb der Kugel ($r < R$) bestimmen. Wir gehen analog vor, nur das die Randbedingung sich geändert hat.

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= -\int \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}dr \\ &= -\frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + K \end{aligned}$$

Auf der Kugeloberfläche müssen die beiden Potentiale gleich sein. Dies ist unsere neue Randbedingung.

$$\begin{aligned} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} &= -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} + K \\ K &= \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

Hierdurch ergibt sich das Potential innerhalb der Kugel.

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3}(3R^2 - r^2)$$

(c) Berechnung der Energie des elektrischen Feldes
Wir berechnen die Energie mit Hilfe der Formel für eine gleichmäßige Ladungsverteilung.

$$W_{el} = \frac{1}{2}\int dV \rho(r)\phi(r)$$

Wir benutzen das Potential innerhalb der Kugel ($r < R$). Da die Kugel homogen geladen ist, ist ρ nicht von r abhängig und wir können es vor das Integral schreiben.

$$\begin{aligned}
W_{el} &= \frac{1}{2}\rho\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3}(3R^2 - r^2)r^2\sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr \\
&= \frac{1}{2}\rho\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(3R^2 - r^2)r^2\sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr \\
&= \frac{Q\rho}{4\epsilon_0 R^3}\int_0^R(3R^2 - r^2)r^2 dr \\
&= \frac{1}{5}\frac{Q\rho R^2}{\epsilon_0} \\
&= \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}
\end{aligned}$$

(d) Bestimmung des klassischen Elektronenradius
Wir setzen das Ergebnis aus Aufgabenteil **(c)** mit mc^2 gleich und lösen nach R auf.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} &= mc^2 \\
R = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}
\end{aligned}$$

$$\frac{3}{5}\frac{(1,602\times10^{-19})^2}{4\pi\cdot 8,854\times10^{-12}\cdot 9,109\times10^{-31}\cdot(2,9979\times10^8)^2} = \frac{3}{5}2,818\times10^{-15}$$

Der klassische Elektronenradius ist aber gerade $2,818\times10^{-15}$m. Wir liegen also um den Faktor $\frac{3}{5}$ daneben, was man eigentlich nur dadurch erklären kann, daß beim klassischen Elektronenradius angenommen wird, daß die gesamte Ladung auf der Kugeloberfläche liegt, wodurch der Faktor $\frac{3}{5}$ wegfällt.

5.2 Kugelkondensator

(c) Bestimmung der Kapazität
Wir bestimmen die Kapazität des Kondensators durch

$$C = \frac{Q}{U}$$

Als erstes bestimmen wir U.

$$\begin{aligned} U &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) \end{aligned}$$

Jetzt können wir die Kapazität bestimmen.

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q 4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{Q(R_2 - R_1)} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

(b) Bestimmung der Energie

$$\begin{aligned} W_{el} &= \frac{\epsilon_0}{2} \int dV E^2 \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4} r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) \end{aligned}$$

Um das Ergebnis vergleichen zu können, berechnen wir $W_{el} = \frac{1}{2} C U^2$ mit den Ergebnissen aus Aufgabenteil **(a)**.

$$\begin{aligned} W_{el} &= \frac{1}{2} C U^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right) \cdot \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) \right]^2 \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) \end{aligned}$$

Wie man sehen kann stimmen die beiden Ergebnisse überein.