4 Übung zur Physik II - Blatt 4

Benedikt Birkenbach (3699455)
Gruppe 2
Philipp Messer

4.1 Geladene Scheibe

Um das Integral bestimmen zu können, vereinfachen wir es. Wir berechnen die elektrische Feldstärke auf der Symmetrieachse in z–Richtung. Da sich alle Kräfte senkrecht auf die Symmetrieachse wegheben, müssen wir nur die Kräfte in z–Richtung bestimmen. Den Abstand $|\vec{r}-\vec{r}'|$ können wir auch durch den Satz des Pythagoras mit $\sqrt{\rho^2+z^2}^3$ schreiben. Unser Ergebnis wird ein Skalar sein, welches wir mit dem Einheitsvektor in z–Richtung multiplizieren. Es ergibt sich folgendes Integral.

$$\begin{aligned}
E(r) &= \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{Q}{\pi R^2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}^3}\rho d\rho d\varphi \\
&= \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2}\int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}^3}d\rho \\
&= \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \\
\text{mit Oberflächenladung} \quad & Q = \pi R^2\sigma \\
&= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)
\end{aligned}$$

Damit folgt

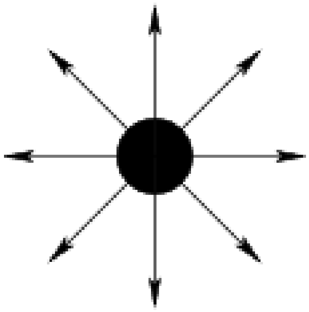
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\cdot\vec{e}_z$$

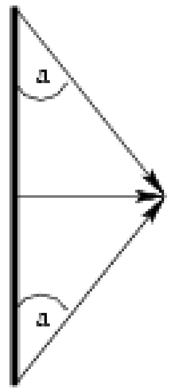
Läßt man den Radius ins unendliche gehen, so fällt jede Abhängigkeit heraus.

$$\lim_{R\to\infty} E(r) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

4.3 Geladener Draht

Da es sich um einen undendlich langen Draht handelt, können wir für jeden Punkt annehmen, daß er in der xy–Ebene liegt. Man kann nun für jeden Ortsvektor $\vec{r}$ annehmen, daß dieser ebenfalls in der xy–Ebene liegt. Auf den Punkt an der Stelle $\vec{r}$ wirken nun nur Kräfte, welche senkrecht zur z–Achse zeigen, da es zu jedem Punkt $(0,0,z)$ einen Punkt $(0,0,-z)$ gibt. Die Kräft senkrecht auf die xy–Ebene heben sich also gerade auf.
Die Feldlinien verlaufen auf der xy–Ebene radial in alle Richtungen. Wegen der unendlichen Länge des Drahtes, ist das Feld konstant (für ρ größer R).





Da das elektrische Feld konstant, ist kann man es bei der Berechnung des Flusses E vor das Integral schreiben.

$$\int_{\partial V} E df = E \int_{\partial V} df = E \cdot 2\pi R l$$

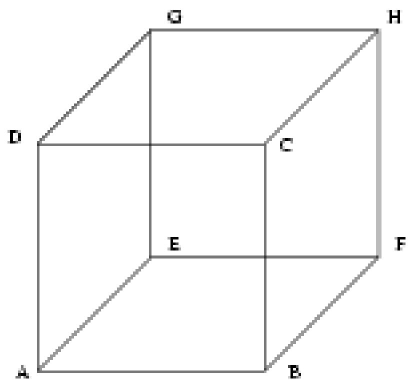
Wir benutzen hier keine Vektoren, da wir die Richtung des E-Feldes bereits kennen (radial). Das Gauß'schen Gesetzes sagt, daß $\Psi = \frac{Q}{\epsilon_0}$ gilt (mit $Q = \lambda l$).

$$\begin{aligned} E \cdot 2\pi R l &= \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \\ E &= \frac{\lambda}{2\pi R} \end{aligned}$$

Jetzt multiplizieren wir noch mit dem radialen Einheitsvektor.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi R} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.5 Elektronischer Denksport



Die Ecken der Box seien wie in der Abbildung.
Wir nehmen an zwischen A und H fließt ein Strom I. Als erstes gilt

$$I_{AB} = I_{AD} = I_{AE} = I_{FH} = I_{CH} = I_{GH} = \frac{1}{3}$$

Dann gilt weiter

$$I_{DG} = I_{DC} = \frac{1}{2} I_{AD} = \frac{1}{6} I$$

Jetzt berechnen wir R_{ges} mit Hilfe von $U = RI$.

$$\begin{aligned} U &= R(I_{DG} + I_{DC} + I_{CH}) \\ &= R\frac{5}{6} I \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $R_{ges.} = \frac{5}{6}R$. Aus $R = 1\Omega$ folgt $R_{ges.} = \frac{5}{6}\Omega$.

4.6 Koordinatentransformationen

(a) Berechnung der Tangenten– und Einheitsvektoren

$$t_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_\rho = \frac{t_\rho}{1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_\varphi = \frac{t_\varphi}{\rho} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_z = \frac{t_z}{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit die Einheitsvektoren eine positiv orientierte Orthonormalbasis darstellen, muß die Determinante der drei Vektoren gerade Eins sein.

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

(b) Berechnung der nichtverschwindenen Ableitungen
Alle Ableitungen, in denen kein $\partial\varphi$ oder ein $\partial_\alpha \vec{e}_z$ vorkommt, verschwinden. Es bleiben nur

$$\partial_\varphi \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und noch

$$\partial_\varphi \vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

übrig.

(c) Gradient

$$\left(\sum_\alpha \vec{e}_\alpha \frac{1}{|\vec{t}_\alpha|}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) f = \frac{\partial f}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

(d) Divergenz

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot A &= \sum_{\alpha,\beta} \vec{e}_\alpha \frac{1}{|\vec{t}_\alpha|}\cdot\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial\alpha}\vec{e}_\beta + A_\beta\frac{\partial \vec{e}_\beta}{\partial\alpha}\right) \\
&= \vec{e}_\rho\frac{1}{|\vec{t}_\rho|}\cdot\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + A_\rho\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\rho}\right) + \vec{e}_\rho\frac{1}{|\vec{t}_\rho|}\cdot\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial\rho}\vec{e}_\varphi + A_\varphi\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\rho}\right) \\
&+ \vec{e}_\rho\frac{1}{|\vec{t}_\rho|}\cdot\left(\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\vec{e}_z + A_z\frac{\partial\vec{e}_z}{\partial\rho}\right) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{|\vec{t}_\varphi|}\cdot\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\vec{e}_\rho + A_\rho\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi}\right) \\
&+ \vec{e}_\varphi\frac{1}{|\vec{t}_\varphi|}\cdot\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + A_\varphi\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}\right) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{|\vec{t}_\varphi|}\cdot\left(\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}\vec{e}_z + A_z\frac{\partial\vec{e}_z}{\partial\varphi}\right) \\
&+ \vec{e}_z\frac{1}{|\vec{t}_z|}\cdot\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}\vec{e}_\rho + A_\rho\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial z}\right) + \vec{e}_z\frac{1}{|\vec{t}_z|}\cdot\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\vec{e}_\varphi + A_\varphi\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial z}\right) \\
&+ \vec{e}_z\frac{1}{|\vec{t}_z|}\cdot\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\vec{e}_z + A_z\frac{\partial\vec{e}_z}{\partial z}\right) \\
&= \frac{A_\rho}{\rho} + \frac{\partial A_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
&= \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

Letzter Schritt wegen Produktregel.