Übung zur Physik II - Blatt 3

Benedikt Birkenbach (3699455)
Gruppe 2
Phillip Messer

1 Vektoranalysis – explizite Ableitungen

(a) $\vec{\nabla}\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$

$\psi(\vec{r}) = xy^2 + \cos(xz)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial x} &= y^2 - z\sin(xz) \\
\frac{\partial\psi}{\partial y} &= 2xy \\
\frac{\partial\psi}{\partial z} &= -x\sin(xz) \\
\vec{\nabla}\psi &= \begin{pmatrix} y^2 - z\sin(xz) \\ 2xy \\ -x\sin(xz) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\psi(\vec{r}) = \vec{a}\cdot\vec{r} = a_1x + a_2y + a_3z$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\psi &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\
&= \vec{a}
\end{aligned}$$

$\psi(\vec{r}) = r^n = \sqrt{x^2+y^2+z^2}^n$ mit $r \neq 0$ für $n < 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial x} &= n\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{n-1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
\frac{\partial\psi}{\partial y} &= n\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{n-1} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
\frac{\partial\psi}{\partial z} &= n\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{n-1} \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
\vec{\nabla}\psi &= n\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{n-1} \cdot \vec{e}_r \\
&= nr^{n-1} \cdot \vec{e}_r
\end{aligned}$$

(b) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}$

$\vec{E}(\vec{r}) = (2z, e^{xy}, 1)$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 + ye^{xy} + 0 \\ &= ye^{xy} \end{aligned}$$

$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{b}\cos(\vec{a} \cdot \vec{r}) = (b_1 \cos(a_1x + a_2y + a_3z), b_2 \cos(a_1x + a_2y + a_3z), b_3 \cos(a_1x + a_2y + a_3z)$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= -\sin(a_1x + a_2y + a_3z) \sum_{i=1}^{3} b_i a_i \\ &= -\sin(a_1x + a_2y + a_3z)(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

$\vec{E}(\vec{r}) = r^n \vec{e}_r = r^n \frac{\vec{r}}{r} = r^{n-1}\vec{r}$ mit $r \neq 0$ für $n < 3$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= r + 2x^3 r^{n-2} + r + 2y^3 r^{n-2} + r + 2z^3 r^{n-2} \\ &= r(3 + 2r^{n-3}(x^3 + y^3 + z^3)) \end{aligned}$$

(c) $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\vec{e}_z$

$\vec{A}(\vec{r}) = (z, 0, 0)$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = (0, 1, 0)$$

$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{a} \times \vec{r} = ((a_2z - a_3y), (a_3x - a_1z), (a_1y - a_2x))$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left(\frac{\partial(a_1y - a_2x)}{\partial y} - \frac{\partial(a_3x - a_1z)}{\partial z}\right) \cdot \vec{e}_1 \\ &+ \left(\frac{\partial(a_2z - a_3y)}{\partial z} - \frac{\partial(a_1y - a_2x)}{\partial x}\right) \cdot \vec{e}_2 \\ &+ \left(\frac{\partial(a_3x - a_1z)}{\partial x} - \frac{\partial(a_2z - a_3y)}{\partial y}\right) \cdot \vec{e}_3 \\ &= (a_1 + a_1) \cdot \vec{e}_1 + (a_2 + a_2) \cdot \vec{e}_2 + (a_3 + a_3) \cdot \vec{e}_3 \\ &= 2\vec{a} \end{aligned}$$

$\vec{A}(\vec{r}) = r^n \vec{e}_r = r^{n-1}\vec{r}$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left(\frac{\partial r^{n-1}z}{\partial y} - \frac{\partial r^{n-1}y}{\partial z}\right) \cdot \vec{e}_1 \\ &+ \left(\frac{\partial r^{n-1}x}{\partial z} - \frac{\partial r^{n-1}z}{\partial x}\right) \cdot \vec{e}_2 \\ &+ \left(\frac{\partial r^{n-1}y}{\partial x} - \frac{\partial r^{n-1}x}{\partial y}\right) \cdot \vec{e}_3 \\ &= ((n-1)yzr^{n-3} - (n-1)yzr^{n-3}) \cdot \vec{e}_1 \\ &+ ((n-1)xzr^{n-3} - (n-1)xzr^{n-3}) \cdot \vec{e}_2 \\ &+ ((n-1)xyr^{n-3} - (n-1)xyr^{n-3}) \cdot \vec{e}_3 \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

2 Vektoranalysis - Rechenregeln

(a) $\vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{A}) = (\vec{\nabla}\psi) \cdot \vec{A} + \psi(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{A}) &= \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} \psi A_1 \\ \psi A_2 \\ \psi A_3 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x} \psi \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial y} \psi \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} A_3 + \frac{\partial A_3}{\partial z} \psi \right) \\
&= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} A_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y} A_2 + \frac{\partial \psi}{\partial z} A_3 \right) + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) \psi \\
&= (\vec{\nabla}\psi) \cdot \vec{A} + \psi(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})
\end{aligned}$$

(b) $\vec{\nabla} \times (\psi \vec{A}) = (\vec{\nabla}\psi) \times \vec{A} + \psi(\vec{\nabla} \times \vec{A})$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (\psi \vec{A}) &= \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} \psi A_1 \\ \psi A_2 \\ \psi A_3 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(\psi A_3) - \frac{\partial}{\partial z}(\psi A_2) \right) \cdot \vec{e}_1 \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial z}(\psi A_1) - \frac{\partial}{\partial x}(\psi A_3) \right) \cdot \vec{e}_2 \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(\psi A_2) - \frac{\partial}{\partial y}(\psi A_1) \right) \cdot \vec{e}_3 \\
&= \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} A_3 + \frac{\partial A_3}{\partial y} \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} A_2 - \frac{\partial A_2}{\partial z} \psi \right) \cdot \vec{e}_1 \\
&+ \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial z} \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} A_3 - \frac{\partial A_3}{\partial x} \psi \right) \cdot \vec{e}_2 \\
&+ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial x} \psi - \frac{\partial \psi}{\partial y} A_1 - \frac{\partial A_1}{\partial y} \psi \right) \cdot \vec{e}_3 \\
&= \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} A_3 - \frac{\partial \psi}{\partial z} A_2 \right) \cdot \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} \psi - \frac{\partial A_2}{\partial z} \psi \right) \cdot \vec{e}_1 \\
&+ \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} A_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x} A_3 \right) \cdot \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} \psi - \frac{\partial A_1}{\partial y} \psi \right) \cdot \vec{e}_2 \\
&+ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} A_2 - \frac{\partial \psi}{\partial y} A_1 \right) \cdot \vec{e}_3 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} \psi - \frac{\partial A_1}{\partial y} \psi \right) \cdot \vec{e}_3 \\
&= (\vec{\nabla}\psi) \times \vec{A} + \psi(\vec{\nabla} \times \vec{A})
\end{aligned}$$

3 Flussintegral

(a) Fluss aus einem geschlossenen Halbzylinder

explizite Berechnung
Der gesamte Fluss setzt sich aus Fluss durch Mantel, Rücken, oberen Deckel und unteren Deckel zusammen. Es gilt:

$$\int_{Halbzylinder} d\vec{f}\cdot\vec{j} = \int_{Mantel} d\vec{f}\cdot\vec{j} + \int_{o.Deckel} d\vec{f}\cdot\vec{j} + \int_{u.Deckel} d\vec{f}\cdot\vec{j} + \int_{Ruecken} d\vec{f}\cdot\vec{j}$$

Als erstes berechnen wir den Fluss des Mantels in Polarkoordinaten. Das Vektorfeld $\vec{j}(\vec{r})$ muss in Polarkoordinaten umgerechnet werden.

$$\vec{j}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 2H \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor lautet:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hiermit ergibt sich mit dem Flächenelement des Zylinders ($Rd\varphi dz$) $d\vec{f}$:

$$d\vec{f} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi dz$$

Jetzt können wir den Fluss durch die Mantelfläche bestimmen.

$$\begin{aligned}
\int_{Mantel} d\vec{f}\cdot\vec{j} &= \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}\int_0^{\pi} \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 2H \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi dz \\
&= \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}\int_0^{\pi} R^2\cos^2(\varphi) + R^2\sin^2(\varphi) d\varphi dz \\
&= R^2\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}\int_0^{\pi} d\varphi dz \\
&= R^2\pi H
\end{aligned}$$

Als nächstes bestimmen wir das Flussintegral des oberen Deckels. Den Normalenvektor kann man sich leicht überlegen, er steht senkrecht auf die Kreisfläche. Der Abstand von der X–Achse beträgt gerade $\frac{H}{2}$ und somit ergibt sich für die z–Komponente des

Vektorfeldes der konstante Wert H. Nun können wir das Integral bestimmen.

$$\begin{aligned}\int_{o.Deckel} d\vec{f}\cdot\vec{j} &= \int_0^R\int_0^\pi \begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ H\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} d\varphi d\rho\\ &= \int_0^R\int_0^\pi \rho H d\varphi d\rho\\ &= \frac{1}{2}\pi R^2 H\end{aligned}$$

Für den anderen Deckel berechnen wir das Integral vollkommen analog, lediglich der Normalenvektor ist entgegengesetzt orientiert, was durch die negative Höhe ausgeglichen wird.

$$\begin{aligned}\int_{o.Deckel} d\vec{f}\cdot\vec{j} &= \int_0^R\int_0^\pi \begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ -H\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} d\varphi d\rho\\ &= \int_0^R\int_0^\pi \rho H d\varphi d\rho\\ &= \frac{1}{2}\pi R^2 H\end{aligned}$$

Nun müssen wir nur noch das Integral des Rückens berechnen. Der x–Wert ist konstant Null und der Normalenvektor steht senkrecht auf dem Rücken in positiver x–Richtung.

$$\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}}\int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} dxdz = 0$$

Jetzt können wir den Fluss des Vektorfeldes bestimmen.

$$\pi R^2 H + \frac{1}{2}\pi R^2 H + \frac{1}{2}\pi R^2 H = 2\pi R^2 H$$

Überprüfung mit Hilfe des Gaußschen Satzes

$$\int_{Hz} dV(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}) = \int_{Hz} dV 1 + 1 + 2 = 4\int_{Hz} dV = 2\pi R^2 H$$

(b) Fluss aus einer geschlossenen Halbkugel

explizite Berechnung

Der gesamte Fluss setzt sich aus dem Fluss der Halbkugeloberfläche und des Bodens zusammen.

$$\int_{Halbkugel} d\vec{f} \cdot \vec{j} = \int_{Hko} d\vec{f} \cdot \vec{j} + \int_{Boden} d\vec{f} \cdot \vec{j}$$

Als erstes berechnen wir das Integral über die Halbkugeloberfläche. Dabei benutzen wir Kugelkoordinaten und müssen das Vektorfeld entsprechend umrechnen.

$$\vec{j}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} R\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ R\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 2R\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor ist immer senkrecht auf der Kugeloberfläche.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Mit dem Flächenelement der Kugel ergibt sich folgendes Integral.

$$\begin{aligned}
\int_{Hko} d\vec{f} \cdot \vec{j} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \sin(\vartheta) \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ 2\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} d\varphi d\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \sin(\vartheta)(1+\cos^2(\vartheta)) d\varphi d\vartheta \\
&= R^3 \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta)\cos^2(\vartheta) d\varphi d\vartheta \right) \\
&= R^3 \left(2\pi + \frac{2}{3}\pi \right) \\
&= \frac{8}{3}\pi R^3
\end{aligned}$$

Jetzt müssen wir noch das Integral für den Boden bestimmen. Der Nullvektor sitzt senkrecht auf dem Boden und zeigt in negative z–Richtung. Die z–Komponente des Vektorfeldes ist konstant Null.

$$\int_{Boden} d\vec{f} \cdot \vec{j} = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} \rho^2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\varphi d\rho = 0$$

Hiermit ergibt sich ein Gesamtfluss von $\frac{8}{3}\pi R^3$.

Überprüfung mit Hilfe des Gaußschen Satzes

$$\int_{Hk} dV(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) = \int_{Hk} dV 1 + 1 + 2 = 4 \int_{Hk} dV = \frac{8}{3}\pi R^3$$

4 Wegintegral

(a) Berechnen der Rotation. Wir fassen den Koeffizienten $\frac{c}{r^2}$ als ein skalares Feld auf und berechnen die Rotation mit Hilfe Rechenregel aus Aufgabe 2(b).

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) &= (\vec{\nabla} A_s) \times \vec{A}_v + A_s(\vec{\nabla} \times \vec{A}_v) \\
&= \frac{2c}{r^4} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x^2 - y^2 \end{pmatrix} + \frac{2c}{r^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Zu beachten ist vor allem, daß die Rotation nicht Null ist, somit liegt kein konservatives Feld vor. Die Funktion ist an der Stelle $x = y = z = 0$ nicht differenzierbar.

(b) Berechnen des Wegintegrals.

$$\oint_C d\vec{s} \cdot \vec{A}$$

Mit $C =$ Kreisweg mit Radius R in der x,y–Ebene.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} = \frac{c}{R} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt können wir das Wegintegral berechnen.

$$
\begin{aligned}
\oint_C d\vec{s} \cdot \vec{A} &= \int_0^{2\pi} \vec{A} \cdot \dot{\vec{r}} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{c}{R} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} c d\varphi = 2\pi c
\end{aligned}
$$