# Übung zur Physik II - Blatt 1

Benedikt Birkenbach (3699455)
Gruppe 2
Phillip Messer

## 2 Arbeit im elektromagnetischen Feld

**(a)** Damit die Arbeit $A$ nicht von dem Magnetfeld abhängig ist, muss man zeigen, dass das Magnetfeld in der Gleichung für die Arbeit nicht mehr vorkommt.

$$\begin{aligned}
A &= -\int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{F}(t)\, dt \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{r}}(t) \cdot q(\vec{E}(\vec{r}(t)) + \dot{\vec{r}}(t) \times \vec{B}(\vec{r}(t)))\, dt \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} q(\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{E}(\vec{r}(t)) + \dot{\vec{r}}(t) \cdot (\dot{\vec{r}}(t) \times \vec{B}(\vec{r}(t))))\, dt \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} q(\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{E}(\vec{r}(t)) + \underbrace{\underbrace{(\dot{\vec{r}}(t) \times \dot{\vec{r}}(t))}_{=0} \cdot \vec{B}(\vec{r}(t))}_{=0})\, dt \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} q(\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{E}(\vec{r}(t)))\, dt
\end{aligned}$$

Wie man leicht erkennen kann, taucht das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}(t))$ nicht mehr auf, somit ist die Arbeit im elektromagnetischen Feld **nicht** abhängig vom Magnetfeld.

**(b)** Wir benutzen die Formel aus Teilaufgabe **(a)**.

$$\begin{aligned}
A &= -\int_{t_1}^{t_2} q(\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{E}(\vec{r}(t)))\,dt \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} q(\dot{\vec{r}}(t) \cdot -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}))\,dt \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} q \left( \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix} \right) dt \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} q \underbrace{\left( \frac{dx(t)}{dt}\frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial x} + \frac{dy(t)}{dt}\frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial y} + \frac{dz(t)}{dt}\frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial z} \right)}_{\text{totale Zeitableitung}} dt \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} q\frac{d\Phi(\vec{r}(t))}{dt}\,dt \\
&= -q\int_{t_1}^{t_2} d\Phi(\vec{r}(t)) \\
&= -q(\Phi(\vec{r}(t_2)) - \Phi(\vec{r}(t_1))) \\
&= q(\Phi(\vec{r}(t_1)) - \Phi(\vec{r}(t_2)))
\end{aligned}$$

Die Arbeit ist also die Differenz der potentiellen Energie des Teilchens zwischen $t_1$ und $t_2$.

# 3 Atommodell

**(a)** Wir ermitteln die potentielle Energie $E_{pot}$ des Teilchens indem wir die Arbeit berechnen, welche man aufbringen muss, um das Elektron aus einer Ruhelage ins Unendliche zu verschieben.

$$\begin{aligned}
W &= \int_R^U \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-e^2}{r^2}\,dr \\
&= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{U} - \frac{1}{R})
\end{aligned}$$

Jetzt bilden wir $\lim_{U\to\infty}$ und erhalten die potentielle Energie des Elektrons.

$$E_{pot} = \lim_{U\to\infty} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{U} - \frac{1}{R}) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

**(b)** Um die Umlaufgeschwindigkeit und die kinetische Energie des Elektrons zu ermitteln, nutzen wir die Gleichheit von Coulomb– und Zentripetalkraft aus. Es gilt:

$$-\vec{F}_C(\vec{r}) = \vec{F}_Z(\vec{r})$$

Wir wissen, dass die Zentripetalkraft immer senkrecht auf die Umlaufbahn des Elektrons steht und zwar entgegengesetzt der Coulombkraft. Somit können wir mit Beträgen rechnen.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{R^2} &= \frac{m \cdot v^2}{R}\\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{R \cdot m} &= v^2\\ v &= \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{R \cdot m}}\end{aligned}$$

Jetzt, wo wir die Geschwindigkeit des Teilchens kennen, können wir leicht die kinetische Energie $E_{kin}$ berechnen.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m \cdot v^2 = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

**(c)** Damit das Teilchen ins Unendliche entkommen kann, muss die Gesamtenergie des Elektrons größer Null sein. Um den Radius $R$ zu bestimmen, muss die Energie genau Null sein. Es muss also gelten:

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} + \Delta E = 0$$

Daraus ergibt sich folgende Gleichung.

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} + \Delta E\\ 0 &= -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} + \Delta E \cdot R\\ R &= \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R \cdot \Delta E}\end{aligned}$$

Zur Kontrolle betrachten wir noch einmal die Einheiten.

$[R] = \mathrm{m}$ $\quad$ $[e] = \mathrm{C} = \mathrm{As}$ $\quad$ $[\epsilon_0] = \mathrm{C^2J^{-1}m^{-1}}$ $\quad$ $[\Delta E] = \mathrm{J}$

$$\mathrm{m} = \frac{\mathrm{A^2s^2Jm}}{\mathrm{A^2s^2J}} = \mathrm{m}$$

Die Einheiten stimmen und wir haben eine Formel mit deren Hilfe wir nun $R$ bestimmen können.

$$R = \frac{(1,6 \times 10^{-19})^2}{8\pi \cdot 8,8542 \times 10^{-12} \cdot 13,6 \cdot 1,6 \times 10^{-19}} \approx 5,29 \times 10^{-11}$$

Das entspricht $0,529\text{Å}$.

# 4 Elektron im Magnetfeld

Als erstes bestimmen wir die Kräfte, welche auf das Elektron wirken. Hierzu verwenden wir die Gleichung aus **Aufgabe 1** und das zweite Newton'sche Gesetz. Da das elektrische Feld gerade Null beträgt, fällt es aus der Gleichung heraus.

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{\vec{r}}(t) &= q(\dot{\vec{r}}(t) \times \vec{B}(\vec{r}(t))) \\ &= q \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \cdot B_z \\ -\dot{x}(t) \cdot B_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich zwei Differentialgleichungen. In der $z$–Richtung liegt eine konstante Bewegung vor.

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= q\dot{y}(t) \cdot B_z && (1) \\ \ddot{x}(t) &= q\frac{\dot{y}(t) \cdot B_z}{m} \\ m\ddot{y}(t) &= -q\dot{x}(t) \cdot B_z && (2) \\ \ddot{y}(t) &= -q\frac{\dot{x}(t) \cdot B_z}{m} \end{aligned}$$

Um die Bewegung in der $x, y$–Ebene zu beschreiben, verwenden wir die komplexe Variable $c(t) := \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ ein. Leiten wir diese nach der Zeit ab, so ergibt sich:

$$\dot{c}(t) = \ddot{x}(t) + i\ddot{y}(t)$$

Mit $\omega = \frac{q \cdot B_z}{m}$ ergibt sich folgendes.

$$\dot{c}(t) = \dot{y}(t)\omega - i\dot{x}(t)\omega = -i\omega c(t)$$

Also gilt $\dot{c}(t) + i\omega c(t) = 0$. Diese DGL können wir durch den Ansatz $c(t) = Ae^{\lambda t}$ lösen (Siehe Übung13 Physik I).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a \cdot \cos\omega t + b \sin\omega t \\ \dot{y}(t) &= a \cdot \sin\omega t - b \cos\omega t \end{aligned}$$

Mit $a = \dot{x}_0$ und $b = \dot{y}_0$ lösen wir schließlich die Integrale um die Bewegungsgleichung zu bekommen.

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \dot{x}(t)dt = \frac{1}{\omega}(\dot{x}_0 \sin\omega t - \dot{y}_0 \cos\omega t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \\ y(t) &= \int \dot{y}(t)dt = \frac{1}{\omega}(\dot{y}_0 \sin\omega t + \dot{x}_0 \cos\omega t) - \frac{\dot{x}_0}{\omega} \end{aligned}$$

Wobei wir die Konstanten, welche am Ende addiert werden, durch Auflösen der Gleichungen für $y(0)$ bzw. $x(0)$ bestimmen. Nun können wir den Betrag der Bewegungsgleichung bestimmen (Siehe Übung13 Physik I).

$$|\vec{r}(t)| = \frac{1}{\omega}\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}$$

Damit ist die Bewegung nicht abhängig von der Zeit $t$ und somit konstant. Sie verläuft, abhängig von $\dot{z}_0$, spiral- bzw. kreisförmig. Nun bestimmen wir noch die Frequenz.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{q \cdot B_z}{2\pi \cdot m}$$