Übung zur Physik II - Blatt 1

Benedikt Birkenbach (3699455)

1.1 Superpositionsprinzip

Die Coulomb–Kraft zwischen zwei ruhenden Ladungen erechnet man durch:

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

Aufgrund des Superpositionsprinzips können wir die wirkende Kraft auf eine Ladung des Würfels wiefolgt bestimmen:

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i,j}$$

Wir benötigen nun also die einzelnen Kräfte zwischen den Ladungen. Die ersten drei Kräfte sind leicht zu bestimmen, sie sitzen auf den x, y, z–Achsen, wenn wir die Ladung unten vorne links betrachten und diese auf den Koordinatenursprung legen.

$$\vec{F}_{0,1} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{0,2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{0,3} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die nächsten drei Ladungen liegen auf den Diagonalen der drei Quadrate, welche die beobachtete Ladung als Eckpunkte besitzt. Die Entfernung beträgt jeweils $\sqrt{2}a$. Die Wurzeln des normierten Einheitsvektors sind ausgeklammert und mit dem Koeffizienten verrechnet.

$$\vec{F}_{0,4} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2a^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{8} a^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{0,5} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2a^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{8} a^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{0,6} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2a^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{8} a^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die letzte Ladung befindet sich bei dem Punkt (a, a, a) und die Entfernung beträgt $\sqrt{3}a$.

$$\vec{F}_{0,6} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 3a^2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{27}a^2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Jetzt müssen wir schließlich alle Kräfte zusammenaddieren und erhalten damit die resultierende Kraft auf die beobachtete Ladung.

$$\begin{aligned}
\vec{F}_0 &= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{2}a^2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{27}a^2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\\
&= -\frac{\sqrt{54}q^2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{54}a^2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{\sqrt{27}q^2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{54}a^2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}q^2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{54}a^2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\\
&= -\frac{\sqrt{54}+\sqrt{2}+\sqrt{27}}{\sqrt{54}}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis gibt den Koeffizienten für alle Ladungen an. Um die Richtung der Kraft für alle Ladungen zu bekommen, muss man je nach Position der Ladung, die Vorzeichen der einzelnen Komponenten des Vektors verändern.

Um nun die Ladung in der Mitte des Würfels zu berechnen muss die Kraft, welche auf q_0 wirkt, ausgeglichen werden. Es muss also folgendes gelten:

$$\vec{F}_0 = -\vec{F}_{m,0} \text{ mit } \vec{F}_{m,0} = \frac{4qq_m}{4\pi\epsilon_0\sqrt{27}a^2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Uns interessieren jetzt nur noch Beträge, es muss also folgendes gelten:

$$\begin{aligned}
\frac{4qq_m}{4\pi\epsilon_0\sqrt{27}a^2}\sqrt{3} &= \frac{\sqrt{54}+\sqrt{2}+\sqrt{27}}{\sqrt{54}}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}\sqrt{3}\\
\frac{4q_m}{\sqrt{27}} &= \frac{\sqrt{54}+\sqrt{2}+\sqrt{27}}{\sqrt{54}}q\\
q_m &= \frac{\sqrt{54}+\sqrt{2}+\sqrt{27}}{4\sqrt{2}}q\\
q_m &= 2,4676q
\end{aligned}$$

1.2 Neutralität

(a) elektrische (Netto-)Ladung der Erde:
Als erstes Berechnen wir die Anzahl der A_{30}-Atome der Erde. Ein Atom wiegt ca.

$$15(1,6749\times10^{-27} + 1,6726\times10^{-27} + 9,1\times10^{-31} + 10^{-36}) = 5,022615002\times10^{-26}$$

Nun berechnen wir die Anzahl der Atome.

$$\frac{6 \times 10^{24}}{5,023 \times 10^{-26}} = 1,195 \times 10^{50}$$

Die Erde besitzt also ca. $1,946 \times 10^{50}$ Atome, also ca. $1,792 \times 10^{51}$ Elektronen. Gäbe es jetzt einen Ladungsunterschied von 10^{-16} zwischen Protonen und Elektronen, dann besäße die Erde eine Ladung von ca. $1,792 \times 10^{35} e^{-}$C, also $2,867 \times 10^{16}$C.

elektrische (Netto-)Ladung der Sonne:
Ein Wasserstoff–Atom hat ein Proton und ein Elektron. Ein Helium–Atom hat zwei Protonen, zwei Neutronen und zwei Elektronen. Durch die angegebene Verteilung der Teilchen ergibt sich folgende Beziehung.

$$x \cdot 2(m_p + m_n + m_e) + 3x(m_p + m_e) = M_S$$

x bezeichnet die Anzahl der Helium–Atome.

$$\begin{aligned}
2x(1,6749 \times 10^{-27} + 1,6726 \times 10^{-27} + 9,1 \times 10^{-31}) & \\
+3x(1,6726 \times 10^{-27} + 9,1 \times 10^{-31}) &= 2 \times 10^{30} \\
x((6,69682 + 5.02053) \times 10^{-27}) &= 2 \times 10^{30} \\
x(1,171735 \times 10^{-26}) &= 2 \times 10^{30} \\
x &= 1,706870581 \times 10^{56}
\end{aligned}$$

Die Sonne hat damit $170,6871 \times 10^{54}$ Helium–Atome und $56,8957 \times 10^{54}$ Wasserstoff–Atome. Jetzt berechnen wir die Anzahl der Elektronen.

$$2 \cdot 170,6871 \times 10^{54} + 56,8957 \times 10^{54} = 398,2698 \times 10^{54}$$

Und multiplizieren diese mit der Ladungsdifferenz.

$$398,2698 \times 10^{54} \cdot 10^{-16} = 3,9827 \times 10^{40}$$

Damit wäre die Ladung der Sonne ca. $6,3723 \times 10^{21}$C.

(b) Wir berechnen als erstes die Gravitationskraft zwischen Sonne und Erde.

$$F_G = G \cdot \frac{2 \times 10^{30} \cdot 6 \times 10^{24}}{(1,5 \times 10^{11})^2} = 3,5573 \times 10^{22}$$

Nun berechnen wir die elektrostatische Kraft, welche in unserem Beispiel vorhanden wäre.

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2,867 \times 10^{16} \cdot 6,3723 \times 10^{21}}{(1,5 \times 10^{11})^2} = 72,978 \times 10^{24}$$

Damit wäre die elektrostatische Kraft wesentlich größer als die Gravitationskraft und die Erde würde von der Sonne abgestoßen werden (und umgekehrt).

1.3 Millikanscher Versuch

Wenn ein Öltröpfchen mit $v = 0,3\eta\frac{m}{s}$ konstant sinkt, ist die Stokessche Reibung und Erdanziehung gerade ausgeglichen. Es gilt also:

$$6\pi\eta r v = mg$$

Mit $m = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$ ergeben sich folgende Gleichungen.

$$\begin{aligned} 6\pi\eta v r &= \rho\frac{4}{3}\pi r^3 g \\ 6\eta v &= \rho\frac{4}{3} r^2 g \\ r^2 &= \frac{9 \cdot 1,8 \times 10^{-5} \cdot 0,3 \times 10^{-6}}{2 \cdot 900 \cdot 9,81} \\ r &= 5,246 \times 10^{-8} \end{aligned}$$

Nun können wir leicht die Masse bestimmen.

$$\rho\frac{4}{3}\pi r^3 = 900 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 5,443 \times 10^{-19}$$

Jetzt wo die Masse des Öltröpfchens bekannt ist, können wir dessen Ladung bestimmen, wenn es durch ein $16,7\frac{V}{m}$ starkes elektrisches Feld in der Schwebe gehalten wird. Die Stokessche Reibung fällt vollkommen raus, da das Tröpfchen sich nicht bewegt. Es muss also folgende Beziehung gelten:

$$|m \cdot g| = |q \cdot E|$$

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned} 5,443 \times 10^{-19} \cdot 9,81 &= 16,7q \\ q &= \frac{5,443 \times 10^{-19} \cdot 9,81}{16,7} \\ &= 3,197 \times 10^{-19} \end{aligned}$$

Jetzt müssen wir nur noch die Anzahl der Elementarladungen bestimmen:

$$\frac{3,2}{1,6} = 2$$

1.4 Arbeit im elektrischen Feld

Die Arbeit zwischen den Punkten 2 und 3 sowie 4 und 1 beträgt gerade Null, da sich die Ladung entlang der Äquipotentialflächen bewegt. Hierfür wird keine Kraft benötigt, also auch keine Arbeit verrichtet.

Nun berechnen wir die Arbeit zwischen den Punkten 1 und 2.

$$\begin{aligned}
W_{1,2} &= \int \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} \\
&= \int_{r_1}^{r_2} -a\frac{1}{x^3}\begin{pmatrix} x\cos\varphi \\ x\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\cos\varphi \\ x\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} dx \\
&= \int_{r_1}^{r_2} -a\frac{1}{x^2} \\
&= a\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \\
&= a\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}
\end{aligned}$$

Schließlich noch die Arbeit zwischen den Punkten 4 und 1.

$$\begin{aligned}
W_{1,2} &= \int \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} \\
&= \int_{r_2}^{r_1} -a\frac{1}{x^3}\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx \\
&= \int_{r_2}^{r_1} -a\frac{1}{x^2} \\
&= a\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \\
&= a\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \\
&= -a\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich, daß die verrichtete Arbeit Null beträgt. Etwas anderes hätte man für ein konservatives Kraftfeld und einen geschlossenen Weg auch nicht erwartet.