

## Teil I.

# 1. Klausur – Elektrostatik

## 1. Felder und Quellen

### 1.1. Elektromagnetische Kraft

Auf ein Teilchen mit der Ladung  $q_i$  an dem Ort  $\vec{r}_i$  mit der Geschwindigkeit  $\dot{\vec{r}}_i$  wirkt eine Kraft

$$\vec{F}_i(\vec{r}_i) = q_i[\vec{E}(\vec{r}_i) + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i)]$$

mit dem elektrischen Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  und dem Magnetfeld  $\vec{B}(\vec{r})$ . Diese Kraft setzt sich zusammen aus der **Coulomb-Kraft**

$$\vec{F}_C = q_i \cdot \vec{E}(\vec{r}_i)$$

und der **Lorentz-Kraft**

$$\vec{F}_L = q_i \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i)$$

### 1.2. Elektrostatische Kraft und E-Feld

Wir betrachten jetzt den Fall von ruhenden Ladungen, d.h.  $\dot{\vec{r}}_i = 0$  und somit *auch*  $\vec{F}_L = 0$ . Man sei sich im klaren darüber, daß auf die Ladungen Kräfte wirken, diese Ladungen sich allerdings nicht bewegen. Um ein konstantes E-Feld aufzubauen, benutzt man zum Beispiel einen Plattenkondensator (siehe 2.4 Plattenkondensator). Es gilt das Superpositionsprinzip. Wir definieren das Elektrische Feld (bzw. die elektrische Feldstärke) durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{q_i} \vec{F}_i(\vec{r}_i)$$

Hieraus ergibt sich das elektrische Feld einer Ladungsverteilung durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \sum_j \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \right)$$

Somit gilt speziell für die Kraft zwischen zwei Ladungen

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 \cdot q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right)$$

Im Gegensatz zur Masse ( $E = mc^2$ ) bleibt die Ladung in einem abgeschlossenen System **immer** erhalten.

### 1.3. Ströme

Der Strom ist definiert als der Fluss von Ladung durch eine Fläche pro Zeiteinheit. Die Stromdichte  $\vec{j}$  ist definiert durch

$$\vec{j} := \rho \vec{v}$$

mit Ladungsdichte  $\rho$  und Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Der Strom  $I$  durch ein Flächenstück  $\Delta F$  beträgt

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \vec{j} \cdot d\vec{f}$$

Für ausgedehnte Flächen erhalten wir das Flußintegral

$$I = \sum_{\Delta F} \vec{j} \cdot \Delta \vec{f} \rightarrow \int_F \vec{j} \cdot d\vec{f}$$

Man muß also ein Flächenintegral bestimmen. Das Flächenelement ist gegeben durch

$$d\vec{f} = \pm (du \vec{t}_u) \times (dv \vec{t}_v)$$

mit den Tangenvektoren

$$\vec{t}_u = \frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u, v)$$

und

$$\vec{t}_v = \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u, v)$$

### 1.4. Gauß'scher Integralsatz

Für ein Volumen  $V$  und ein Vektorfeld  $\vec{A}(\vec{r})$  gilt

$$\oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{f} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV$$

mit der Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z$$

### 1.5. Stoke'sche Integralsatz

Für eine Fläche  $F$  und ein auf  $F$  differenzierbares Vektorfeld  $\vec{A}(\vec{r})$  gilt

$$\oint_{\partial F} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_F (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{f}$$

## 2. Elektrostatik

Mit einer Ladungsdichte  $\rho(\vec{r})$ , welche gegeben ist durch  $\Delta q = \rho(\vec{r}) \Delta V$  erhält man das elektrische Feld durch Integration über das Volumen und die Ladungsdichte.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

## 2.1. Quellstärke - Gauß'sches Gesetz

Das Gauß'sche Gesetz besagt:

Der Fluß des elektrischen Feldes  $\vec{E}$  durch eine beliebige geschlossene Oberfläche, also das Oberflächenintegral  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{f}$ , ist gleich dem  $\frac{1}{\epsilon_0}$ -fachen der von der Oberfläche eingeschlossenen Gesamtladung:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} = \int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

Hieraus ergibt sich eine der Maxwell'schen Gleichungen.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

## 2.2. Wirbelstärke

Für eine Punktladung im Ursprung gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Wegen des Superpositionsprinzip gilt dies für alle Ladungen, woraus folgt

$$\oint_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_F (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{f} = 0$$

was bedeutet, daß die Coulombkraft  $q\vec{E}(\vec{r})$  eine konservative Kraft ist.

## 2.3. Potential und Feldenergie

Wenn  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$  gilt, dann liegt ein konservatives Kraftfeld vor. Also existiert ein Potential  $\phi(\vec{r})$  gegeben durch

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \text{bzw.} \quad \phi(\vec{r}) = - \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

und eine potentielle Energie

$$V(\vec{r}) = q\phi(\vec{r})$$

Aus diesen Zusammenhängen kann man die Poisson-Gleichung herleiten.

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

## 2.4. Plattenkondensator

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei Platten mit den Flächen  $A$  im Abstand  $d$  und den Ladungen  $\pm Q$  auf den beiden Platten. Er hat eine Flächenladungsdichte  $\sigma = \pm \frac{Q}{A}$ , eine Spannungsdifferenz  $U = E \cdot d = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$  und eine Kapazität  $C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ .

Die Energie des Kondensators bekommt man durch Integration über die Ladung, d.h. man lädt den Kondensator von 0 bis  $Q$  auf und betrachtet die verrichtete Arbeit.

$$W = \int_0^Q dQ' \frac{Q'd}{\epsilon_0 A} = \frac{d}{2\epsilon_0 A} Q^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{\epsilon_0}{2} d A E^2 = W_{el}$$

## 2.5. Metalle, Influenz

## 2.6. Felder im Dielektrikum

Atome eines Dielektrikums werden innerhalb eines elektrischen Feldes polarisiert, d.h. die Atomkerne und die Elektronenhülle werden verschoben. Ist ein Dielektrikum polarisiert, so tritt ein Dipolmoment  $\vec{p}$  auf mit

$$\vec{p} = \int dV \vec{r} \rho(\vec{r})$$

Für ein Gas mit der Dichte  $n = \frac{\text{Anzahl Atome}}{\text{Volumen}}$  erhält man die Polarisation  $\vec{P}$  des Gases durch

$$\vec{P} = n\vec{p} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

mit der elektrischen Suszeptibilität  $\chi = n\alpha$  und der atomaren Polarisierbarkeit  $\alpha$ . Durch die Polarisation des Gases entsteht an den Rändern eine Ladungsdichte  $\rho^{in}$ . Diese steht durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho^{in}$$

in Zusammenhang mit der Polarisation. Allgemein ist die Polarisation abhängig vom anliegenden elektrischen Feld und dem Material. Sie ist eine Materialeigenschaft.

Man definiert

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \underbrace{(1 + \chi_e)}_{\epsilon_r} \epsilon_0 \vec{E}$$

als das resultierende Feld aus elektrischem Feld und Polarisation. Für Dielektrika definiert man vereinfacht

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

mit  $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$ . Die Felder in einem Dielektrikum sind zusammengefaßt bestimmt durch

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho^{\text{ex}}(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

## Teil II.

# 2.Klausur – Magnetostatik und Elektrodynamik

### 3. Die Maxwellschen Gleichungen

Die Maxwellschen Gleichung für Felder im Vakuum in Gegenwart von elektrischer Ladung der Dichte  $\rho$  und elektrischem Strom, also von bewegter Ladung der Dichte  $\vec{j}$  lauten.

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Die erste Gleichung ist das Faradaysche Induktionsgesetz. Die dritte Gleichung geht unmittelbar aus dem Coulombschen Gesetz hervor. Für die Elektro- bzw. Magnetostatik werden alle Terme, welche Ableitung von der Zeit sind, heraus.

Die Maxwellschen Gleichungen in Materie lauten

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho^{\text{ex}}$$

$$\text{rot } \vec{E} + \dot{\vec{B}} = \vec{0}$$

$$\text{rot } \vec{H} - \dot{\vec{D}} = \vec{j}^{\text{ex}}$$

## 4. Magnetostatik

### 4.1. Das magnetische Feld

In einem bestimmten Zeitpunkt passiert ein Teilchen den Punkt  $(x, y, z)$  in einem Bezugssystem mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Das elektrische Feld  $\vec{E}$  ist gegeben. Auf das Teilchen wirkt dann eine Kraft

$$\vec{F} = q\vec{E} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Uns interessiert nur der Summand, die sogenannte Lorentzkraft.

Im allgemeinen kann man das  $\vec{B}$ -Feld über folgende Beziehung bestimmen.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I$$

Wobei  $I$  der von dem Weg  $d\vec{s}$  umschlungene Strom ist. Dies kann man wiederum durch folgende Gleichung ergänzen.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Mithilfe des Stokeschen Satz ergibt sich eine der Maxwellschen Gleichungen.

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

### 4.2. Vektorpotential

Zu einem Magnetfeld existiert ein Vektorpotential  $\vec{A}$  welches folgende Eigenschaft besitzt.

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

Dieses Vektorpotential kann man durch folgende Gleichung bestimmen.

$$\vec{A}(x_1, y_1, z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(x_2, y_2, z_2) dV_2}{\vec{r}_{12}}$$

Wobei wir das Vektorpotential an der Stelle  $(x_1, y_1, z_1)$  berechnen wollen, welches durch eine Stromdichte an der Stelle  $(x_2, y_2, z_2)$  erzeugt wird. Wir wissen das  $\text{div } \vec{A} = 0$  gilt, somit ist das Vektorpotential im ganzen Raum konstant.

### 4.3. Biot–Savart’sches Gesetz

Wir können  $\vec{B}$  auch auf eine andere Weise bestimmen. Es gilt das Biot–Savart’sches Gesetz.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

#### 4.4. Gegenüberstellung Elektrostatik und Magnetostatik

Elektrostatik		Magnetostatik
$\vec{D}$	$\longleftrightarrow$	$\vec{B}$
$\vec{E}$	$\longleftrightarrow$	$\vec{H}$
$\epsilon$	$\longleftrightarrow$	$\mu$
$\vec{P}$	$\longleftrightarrow$	$\mu_0 \vec{M}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$	$\longleftrightarrow$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$	$\longleftrightarrow$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{0}$
$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$	$\longleftrightarrow$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$
$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$\longleftrightarrow$	$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$

#### 4.5. Magnetischer Fluß und Induktion

Der magnetische Fluß  $\Phi(t)$  durch eine Leiterschleife ist gegeben durch

$$\Phi(t) = \int_A \vec{B}(t) \cdot d\vec{A}(t)$$

Die induzierte Spannung ist gegeben durch

$$U(t) = - \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

#### 4.6. Spulen

Die Induktivität  $L$  einer Spule ist durch folgende Beziehung gegeben.

$$U(t) = L \dot{I}(t)$$

**Parallel-Schaltung** Es gilt folgende Gesetzmäßigkeit:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

**Reihen-Schaltung** Es gilt folgende Gesetzmäßigkeit:

$$L = L_1 + L_2$$