

6 Übung zur Physik I - Blatt 6

Benedikt Birkenbach (3699455)

Gruppe 8, Rauno Buescher

6.1 Uneigentlich Integrale

(a) $\int_1^\infty (1 + \frac{1}{x^2}) dx$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a (1 + \frac{1}{x^2}) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[x - \frac{1}{x} \right]_1^a = \lim_{a \rightarrow \infty} (a + 1 - \frac{1}{a} - 1) = \lim_{a \rightarrow \infty} (a - \frac{1}{a}) = \infty$$

(b) $\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^s} dx$

Substitution mit $y = 1 + x^2 = g(x)$ und $dy = 2x dx$.

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^{g(a)} \frac{x}{y^s} \frac{dy}{2x} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_1^{g(a)} \frac{1}{y^s} dy = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-s} y^{1-s} \right]_1^{g(a)}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-s} y^{1-s} \right]_1^{g(a)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-s} (1+a^2)^{1-s} - \frac{1}{1-s} \right] = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2-2s} [(1+a^2)^{1-s} - 1]$$

$$\Rightarrow I = \begin{cases} -\frac{1}{2-2s} & \text{für } s > 1 \\ \infty & \text{für } s \leq 1 \text{ wegen } \lim_{a \rightarrow \infty} [\ln a] = \infty \end{cases}$$

(c) $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^s} dx$

Substitution mit $y = 1 - x = g(x)$ und $dy = -dx$.

$$-\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{1}{y^s} dy = -\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{1-s} [y^{1-s}]_a^1 = -\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{1-s} [1 - a^{1-s}]$$

$$\Rightarrow I = \begin{cases} -\frac{1}{1-s} & \text{für } s > 1 \\ -\infty & \text{für } s \leq 1 \text{ wegen } \lim_{a \rightarrow \infty} [\ln 1 - \ln a] = -\infty \end{cases}$$

6.2 Superflummis

$$(d) \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{\alpha c} \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{\alpha c} \frac{x}{1+x^2} dx &= \lim_{c \rightarrow \infty} [x \tan^{-1} x]_{-c}^{\alpha c} - \int_{-c}^{\alpha c} \tan^{-1} x \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} [x \tan^{-1} x]_{-c}^{\alpha c} - \left[x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{-c}^{\alpha c} \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} [\alpha c \tan^{-1}(\alpha c) - (-c \tan^{-1}(-c))] \\ &\quad - \left[\alpha c \tan^{-1}(\alpha c) - \frac{1}{2} \ln(1+\alpha^2 c^2) - (-c \tan^{-1}(-c) - \frac{1}{2} \ln(1+(-c)^2)) \right] \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\ln(1+\alpha^2 c^2) - \ln(1+(-c)^2)) \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln \frac{1+\alpha^2 c^2}{1+(-c)^2} \end{aligned}$$

Für große c können wir die Einsen vernachlässigen. Es gilt also:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha^2 c^2}{c^2} = \frac{1}{2} \ln \alpha^2$$

6.2 Superflummis

Nach dem Aufprall fliegt m_2 mit der entgegengesetzten Geschwindigkeit von m_1 . Es gilt also für einen kurzen Zeitraum folgende Beziehung:

$$v_2 = -v_1$$

Durch die Energie- und Impulserhaltung ergeben sich folgende Gleichungen.

Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \\ m_1 (v_1^2 - v_1'^2) &= m_2 (v_2'^2 - v_2^2) \\ m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') &= m_2 (v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \end{aligned}$$

Impulserhaltung:

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2)$$

Hierdurch ergibt sich folgende Gleichung.

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2$$

$$v_2' = v_1' + 2v_1$$

Durch Auflösen und Einsetzen erhält man folgende Beziehung.

$$v_1 - v_1' = \frac{m_2}{m_1} (v_2' + 2v_1)$$

6.3 Raketenantrieb

$$v_1 - v'_1 = \frac{m_2}{m_1}(v'_1 + 3v_1)$$

Wir definieren: $\eta = \frac{m_2}{m_1}$

$$v_1 - v'_1 = v'_1\eta + 3v_1\eta$$

$$v_1 - 3\eta v_1 = v'_1\eta + v_1$$

$$v_1(1 - 3\eta) = v'_1(\eta + 1)$$

$$v'_1 = (-v_1) \frac{(3\eta - 1)}{\eta + 1}$$

Wenn wir m_2 groß und m_1 klein werden lassen, dann wird η relativ schnell groß. Für ein großes η können wir die Einsen vernachlässigen und es gilt folgendes:

$$v'_1 = v_1 \frac{3\eta}{\eta} = 3v_1$$

Das Maximum von v'_1 ist also gerade das dreifache der Anfangsgeschwindigkeit. Die Höhe können wir über die verfügbare Energie berechnen. Knapp nach dem Stoß gilt.

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v'_1 \wedge E_p = 0$$

Also $E = E_k$. Die Energie muss erhalten bleiben.

$$\frac{1}{2}m_1v_1'^2 = m_1gh$$

$$\frac{1}{2}v_1'^2 9 = gh \quad \text{mit } v_1 = \sqrt{2gh}$$

$$9h_a = h$$

Am Ende ist die Höhe also neunmal so groß. Da die Energie des großen Flummis ebenfalls erhalten bleibt (da $m_1 \ll m_2$) erreicht dieser wieder die ursprüngliche Höhe. Es hat den Anschein, das Energie gewonnen wurde, allerdings rechnen wir mit Grenzwerten und vernachlässigen bestimmte Dinge. Somit gelten diese Werte nur in der Theorie und wenn, dann nur annähernd in der Praxis.

6.3 Raketenantrieb

(a) Mit Hilfe der allgemeinen Bewegungsgleichung können wir folgendes errechnen.

$$m \frac{dv}{dt} + u \frac{dm}{dt} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt} \frac{1}{m}$$

$$v(t) = -u \int \frac{dm}{dtm} dt$$

6.3 Raketenantrieb

$$v(t) = -u \int \frac{1}{m} dm$$

$$v(t) = -u \ln m + v_0$$

Jetzt können wir einsetzen.

$$v(t) = -u \ln (m_n + m_b(0)e^{-\gamma t}) + v_0$$

Wir müssen noch v_0 bestimmen. Für $t = 0$ steht fest, daß die Rakete sich nicht bewegt, wir können $v(t) = 0$ festlegen.

$$0 = -u \ln (m_n + m_b(0)) + v_0$$

$$v_0 = u \ln (m_n + m_b(0))$$

Die ganze Gleichung für $v(t)$ lautet also:

$$v(t) = u \ln (m_n + m_b(0)) - u \ln (m_n + m_b(0)e^{-\gamma t})$$

$$v(t) = u \ln \left(\frac{m_n + m_b(0)}{m_n + m_b(0)e^{-\gamma t}} \right)$$

(b) Um die Endgeschwindigkeit zu berechnen lassen wir t sehr groß werden.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} u \ln \left(\frac{m_n + m_b(0)}{m_n + m_b(0)e^{-\gamma t}} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = u \ln \left(\frac{m_n + m_b(0)}{m_n} \right)$$

$$v_{end} = u \ln \left(\frac{m_n + m_b(0)}{m_n} \right)$$

Man kann hier sehr gut erkennen, das die Endgeschwindigkeit nicht von γ abhängt, sondern nur von dem Massenverhältnis.

(c) Durch die Impulserhaltung bekommt man folgende Gleichung.

$$m_B V_B - m_n V_n = 0$$

Außerdem gilt:

$$V_B + V_n = u$$

$$V_B = u - V_n$$

Nun können wir V_n bestimmen.

$$m_B(u - V_n) = m_n V_n$$

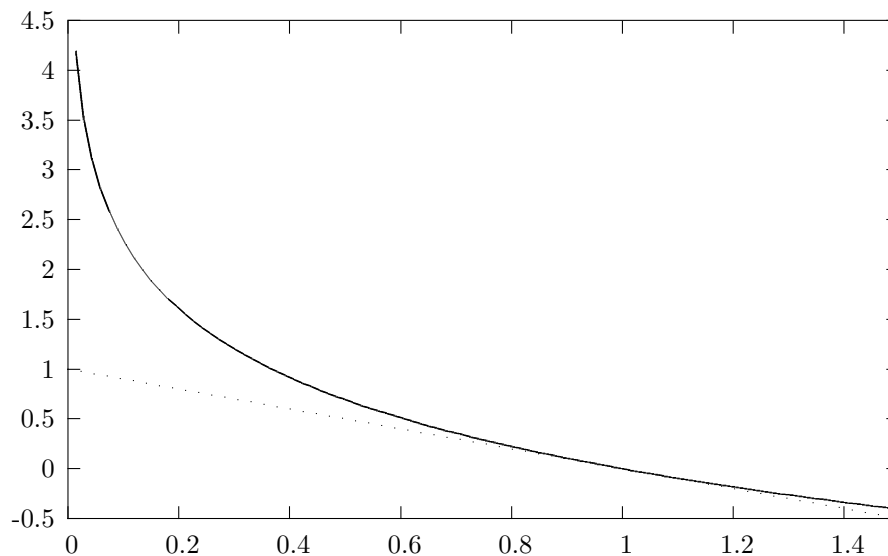
$$m_B u = V_n(m_n + m_B)$$

$$V_n = u \frac{m_B}{m_n + m_B}$$

$$\Rightarrow v_n = u \left(1 - \frac{m_B}{m_n + m_B} \right)$$

6.4 Fallende Kette

(d)



6.4 Fallende Kette

(a) Für den höchsten Punkt der Kette gilt:

$$z(t) = l - \frac{1}{2}gt^2$$

Für alle anderen Punkte verändern sich l und t bis sie bei dem untersten Punkt gerade Null sind.

(b) Der Schwerpunkt befindet sich immer bei der Hälfte der Länge des noch fallenden Teils der Kette.

$$R(t) = \frac{z(t)}{2} = \frac{l - \frac{1}{2}gt^2}{2} = \frac{l}{2} - \frac{1}{4}gt^2$$

Die Beschleunigung ist die zweite Ableitung von $R(t)$.

$$\dot{R}(t) = \frac{1}{2}gt$$

$$\ddot{R}(t) = \frac{1}{2}g$$