5 Übung zur Physik I - Blatt 5

Benedikt Birkenbach (3699455)
Gruppe 8, Rauno Buescher

5.1 Kräftegleichgewicht

Für $\vec{F_1}$ ist nur der Teil von $\vec{F_0}$ wichtig, der parallel zu $\vec{F_1}$ verläuft.

$$F_0 \cos\frac{\alpha}{2} + F_0 \cos\frac{\alpha}{2} = -F_1$$

$$-2F_0 \cos\frac{\alpha}{2} = F_1$$

Um dies zu verifizieren, betrachten wie die vektorielle Summe.

$$\begin{pmatrix} F_0 \sin\frac{\alpha}{2} \\ F_0 \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_0 \sin\frac{\alpha}{2} \\ F_0 \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2F_0 \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In dem Punkt M herrscht also Kräftegleichgewicht, was unsere Berechnung bestätigt.

5.2 Partielle Integration

(a) $f(x) = \cos^2 x = \cos x \cdot \cos x$

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 x dx &= \int \cos x \cdot \cos x dx \\
\int \cos^2 x dx &= \sin x \cos x + \int \sin x \sin x dx \\
\int \cos^2 x dx &= \sin x \cos x + \int 1 - \cos^2 x dx \\
\int \cos^2 x dx &= \sin x \cos x + \int 1 dx - \int \cos^2 x dx \\
\int \cos^2 x dx &= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x dx \\
2\int \cos^2 x dx &= \sin x \cos x + x \\
\int \cos^2 x dx &= \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x) + c \qquad (\text{mit } c = const.)$

(b) $f(x) = x \ln x$

$$\begin{aligned}\int x \ln x dx &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{x}\frac{1}{2}x^2 dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 \\ &= x^2(\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4})\end{aligned}$$

$\Rightarrow F(x) = x^2(\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}) + c \qquad (\text{mit } c = const.)$

5.3 Integration durch Substitution

(a)

$$\int_a^b f(x+c)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

mit $g(x) = x + c \qquad dx = \frac{du}{g'(x)} = \frac{du}{1} \Rightarrow dx = du$

$$\int_a^b f(x+c)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$$

(b)

$$\int_a^b f(xc)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

mit $g(x) = xc \qquad dx = \frac{du}{g'(x)} = \frac{du}{c} \quad \text{für } c \neq 0$

$$\int_a^b f(xc)dx = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)dx \text{ für } c \neq 0$$

(c)

$$\int_a^b xf(x^2)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

mit $g(x) = x^2 \qquad dx = \frac{xdu}{g'(x)} = \frac{xdu}{2x} = \frac{du}{2}$

$$\int_a^b xf(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)dx$$

(d)

$$\int \tan x dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = [-ln \cos x]_a^b$$

mit $g(u) = \frac{1}{u}$ und $a, b \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

5.4 Fernseher

Da $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$ und $\vec{E'} = (0, E_y, 0)$ können wir mit den Beträgen rechnen. Also $|\vec{E}| = E_x$ und $|\vec{E'}| = E_y$. Mit Hilfe von $F = m \cdot a$ erkennen wir folgende Gleichungen.

$$F = m \cdot a = eE$$

$$\Rightarrow a = \frac{e}{m} E$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{e}{m} E \cdot t$$

$$\Rightarrow r(t) = \frac{e}{2m} E \cdot t^2$$

Als erstes berechnen wir die Geschwindigkeit des Elektrons, wenn es den Punkt a passiert. Dafür berechnen wir die Zeit, welche es benötigt um Punkt a zu erreichen.

$$\begin{aligned} a &= \frac{e}{2m} E_x t^2 \\ t^2 &= \frac{2am}{eE_x} \\ t &= \sqrt{\frac{2am}{eE_x}} \end{aligned}$$

Jetzt können wir die Geschwindigkeit des Elektrons am Punkt a berechnen.

$$\begin{aligned} v_x^2 &= \frac{e^2}{m^2} E_x^2 \frac{2am}{eE_x} \\ v_x^2 &= \frac{2ae}{m} E_x \\ v_x &= \sqrt{\frac{2ae}{m} E_x} \end{aligned}$$

Das Elektron hat also nach Punkt a eine Geschwindigkeit von $t_a = \sqrt{\frac{2ae}{m} E_x}$ welche sich in x-Richtung auch nicht mehr verändert bis es auf den Schirm(x_s) trifft. Um die Stärke der Ablenkung in y-Richtung zu bestimmen benötigen wir als erstes die Zeit, welche das Elektron im Wirkungsbereich von E' verbringt.

$$v_x \cdot t = d$$

$$t = \frac{d}{v_x}$$

Jetzt können wir die Geschwindigkeit des Elektrons in y-Richtung berechnen, wenn es d verläßt.

$$v_y = \frac{e}{m} E_y \cdot t = \frac{e}{m} E_y \cdot \frac{d}{v_x} = \frac{ed}{mv_x} E_y$$

Nun kann man den seitlichen Ablenkwinkel ϕ berechnen.

$$\begin{aligned}
\tan\phi &= \frac{v_y}{v_x} \\
&= \frac{edE_y}{mv_x^2} \\
&= \frac{medE_y}{2maeE_x} \\
&= \frac{d}{2a}\cdot\frac{E_y}{E_x} \\
\phi &= \tan^{-1}\left(\frac{d}{2a}\cdot\frac{E_y}{E_x}\right)
\end{aligned}$$

Um den Punkt y_s zu berechnen, benötigen wir die Höhe(y_d) zur x-Achse, in welcher das Elektron d verläßt.

$$y_d = \frac{e}{2m}E_y t^2 = \frac{ed^2m}{2m2ae}\cdot\frac{E_y}{E_x} = \frac{d^2}{4a}\cdot\frac{E_y}{E_x}$$

Nun berechnen wir die Zeit, welche das Elektron benötigt um die Strecke($x_v = x_s - d - b$) nach dem Verlassen von d bis zum Auftreffen des Schirms(x_s) benötigt.

$$v_x \cdot t = x_v$$

$$t = \frac{x_v}{v_x}$$

Durch einsetzen dieser Zeit in $v_y \cdot t = y_s - y_d$ können wir y_s berechnen.

$$\begin{aligned}
v_y \cdot \frac{x_v}{v_x} &= y_s - y_d \\
\underbrace{\frac{v_y}{v_x}}_{\tan\phi} x_v + y_d &= y_s \\
y_s &= y_d + x_v \tan\phi \\
y_s &= \frac{d^2}{4a}\cdot\frac{E_y}{E_x} + x_v\tan\phi
\end{aligned}$$

5.5 Billiard

(a) Die Bedingungen für v_i' und ϕ_i' erhalten wir aus dem Energieerhaltungssatz und aus dem Impulserhaltungssatz für die x und y Komponente.

$$\text{Energieerhaltung: } \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^{2\prime} + \frac{1}{2}m_2v_2^{2\prime}$$

Impulserhaltung:

$$\text{x-Komponente: } m_1v_1 = m_1v_1'\cos\phi_1 + m_2v_2'\cos\phi_2$$

$$\text{y-Komponente: } 0 = m_1v_1'\sin\phi_1 + m_2v_2'\sin\phi_2$$