4 Übung zur Physik I - Blatt 4

Benedikt Birkenbach (3699455)
Gruppe 8, Rauno Buescher

4.1 Leistung

(a) Masse: $m = 75[kg]$ Zeit: $t = 1[s]$ Strecke $t = 1[m]$

Kraft auf die Masse: $F = g[\frac{m}{s^2}] \cdot 75[kg] = 735,75[\frac{m}{s^2}kg] = 735,75[N]$

$\frac{735,75[N] \cdot 1[m]}{1[s]} = 735,75[\frac{Nm}{s}] = 735,75[W]$

$\Rightarrow 1[PS] \hat{=} 735,75[W]$

(b) $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
Die Erdanziehung verursacht auf den Wagen eine Kraft von $\vec{F_g}$.

$$\vec{F_g} = 1000 \cdot g$$

Da die Kraft $\vec{F_g}$ senkrecht nach unten zeigt, berechnen wir den Anteil entlang der ansteigenden Straße und nennen ihn $\vec{F_{||}}$.

$$\vec{F_{||}} = \sin\alpha \vec{F_g}$$

Die maximale Leistung des PKW's geteilt durch seine Geschwindigkeit, ergibt die maximale Kraft, die von dem PKW erbracht werden kann, um diese Geschwindigkeit gegenüber einer anderen Kraft zu halten. (Vorausgesetzt der PKW fährt.)

$$60[PS] \hat{=} 44145[W]$$
$$100[\frac{km}{h}] \hat{=} 27\frac{7}{9}[\frac{m}{s}]$$
$$\frac{44145}{27\frac{7}{9}} = 1589,22$$
$$1589,22 = \sin\alpha\ 1000 \cdot g$$
$$\frac{1589,22}{1000 \cdot g} = \sin\alpha$$
$$\frac{1589,22}{g} = \sin\alpha$$
$$\alpha \approx 9,323$$

Die Steigung berechnet man durch $\tan\alpha$.

$$\tan 9,323 \approx 0,164$$

Die Steigung, welche der PKW bei einer Geschwindigkeit von 100km/h maximal bewältigen kann, beträgt ca. 16,4 %.

4.2 Atwoodsche Fallmaschine

(a) $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

Die gesamte Masse, welche eine Beschleunigung erfährt, ist $m_1 + m_2$. Die Kraft, welche insgesamt wirkt ist $(m_2 - m_1) \cdot g$. Nun kann man die Beschleunigung a leicht berechnen.

$$a = \frac{F}{m} = \frac{(m_2 - m_1) \cdot g}{m_2 + m_1}$$

$$a = \frac{(10 - 5) \cdot g}{10 + 5} = \frac{5 \cdot 9,81}{15} = 3,27$$

Die Beschleunigung beträgt also 3,27m/s und wirkt in Richtung des fallenden Körpers m_2.

(b) $F_{ab} = -F_{ba}$

Die Kraft auf das Seil erhalten wir durch folgende Gleichung:

$$m_2 g - F_S = m_2 a$$

Nun setzen wir a aus Teil (a) ein.

$$m_2 \frac{(m_2 - m_1) \cdot g}{m_2 + m_1} - m_2 g = -F_S$$

$$F_S = m_2 g - m_2 \frac{(m_2 - m_1) \cdot g}{m_2 + m_1}$$

$$F_S = 10g - \frac{10g}{3} = \frac{20}{3} g = 65,4$$

Auf das Seil wirkt eine Kraft von 65,4 N.

4.3 kürzer = schneller

$\vec{r}(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ Auf den Körper wirkt nur eine Beschleunigung g senkrecht zum Boden. Wegen der schiefen Ebene teilt sich die Kraft in 2 Komponenten auf.

$$\sin\alpha + \cos\alpha = g$$

Die Beschleunigung parallel zu dem Brett beträgt $\sin\alpha$. Die Zeit, welche der Körper benötigt setzt sich zusammen aus der Zeit, die er von A zum Auflagepunkt M benötigt, und der Zeit, welche er von M nach B benötigt. Als erstes berechnen wir die Zeit von A nach M.

$$y(t) = h - \frac{1}{2}\sin^2\alpha g t^2$$

4.3 kürzer = schneller

Für $y = 0$ ist der Körper bei M angelangt.

$$
\begin{aligned}
0 &= h - \frac{1}{2}\sin^2(\alpha) g t^2 \\
\frac{1}{2}\sin^2(\alpha) g t^2 &= h \\
t^2 &= \frac{2h}{\sin^2(\alpha) g} \\
t_{AM} &= \frac{\sqrt{2hg}}{\sin(\alpha) g}
\end{aligned}
$$

Um die Zeit von M nach B zu berechnen, benötigen wir die Geschwindigkeit am Punkt M.

$$v = a \cdot t$$

$$v_m = \sin(\alpha) g \cdot \frac{\sqrt{2hg}}{\sin(\alpha) g} = \sqrt{2hg}$$

Die Strecke zwischen M und B berechnen wir, indem wir von M von l subtrahieren.

$$s_{MB} = l - \frac{h}{\tan\alpha}$$

Jetzt können wir die Zeit bestimmen, abhängig von dem Winkel α, welche der Körper benötigt um B zu erreichen.

$$t_{AM} + t_{MB} = t_{AB}$$

$$t_{AM} + \frac{s_{MB}}{v_m} = t_{AB}$$

$$t_{AB}(\alpha) = \frac{\sqrt{2hg}}{\sin(\alpha) g} + \frac{l}{\sqrt{2hg}} - \frac{h}{\sqrt{2hg}\tan\alpha}$$

Um zu berechnen für welches α t_{AB} am geringsten ist, bilden wir die Ableitung von $t_{AB}(\alpha)$ und setzen diese auf Null.

$$\frac{dt(\alpha)}{d\alpha} = \sqrt{\frac{h}{g}}\left(\left(\frac{1}{\tan^2\alpha} + 1\right)\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right)$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \sqrt{\frac{h}{g}}\left(\left(\frac{1}{\tan^2\alpha} + 1\right)\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right) \\
0 &= \left(\frac{1}{\tan^2\alpha} + 1\right)\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \\
0 &= \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 1 - 2\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \\
-1 &= \frac{\cos^2\alpha + 2\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \\
-(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) &= -2\cos\alpha \\
\cos\alpha &= \frac{1}{2} \\
\alpha &= 60
\end{aligned}
$$

Bei einem Winkel von 60° hat der Körper B am schnellsten erreicht.

4.4 Kinematik in Polarkoordinaten

Um die Relationen für $\vec{v}$ und $\vec{a}$ zu verifizieren, müssen wir erstmal $\vec{e_\rho}$ und $\vec{e_\varphi}$ bestimmen.

$$\vec{e_\rho} = \cos(\varphi)\vec{e_x} + \sin(\varphi)\vec{e_y}$$

$$\vec{e_\varphi} = -\sin(\varphi)\vec{e_x} + \cos(\varphi)\vec{e_y}$$

Für $\rho = \rho(t)$ und $\varphi = \varphi(t)$ gelten dann die Ableitungen:

$$\frac{d}{dt}\vec{e_\rho} = -\sin(\varphi(t))\ \dot{\varphi}(t)\vec{e_x} + \cos(\varphi(t))\ \dot{\varphi}(t)\vec{e_y} = \dot{\varphi}(t)\vec{e_\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{e_\varphi} = -\cos(\varphi(t))\ \dot{\varphi}(t)\vec{e_x} - \sin(\varphi(t))\ \dot{\varphi}(t)\vec{e_y} = -\dot{\varphi}(t)\vec{e_\rho}$$

Die Geschwindigkeit ist die Ableitung von $\vec{r}(t)$.

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\vec{e_\rho}} = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}(t)\vec{e_\varphi}$$

Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit.

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \ddot{\rho}\vec{e_\rho} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\vec{e_\varphi} - \rho\dot{\varphi}^2\vec{e_\rho} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e_\varphi}$$

Damit Orts- und Geschwindigkeitsvektor zu jeder Zeit senkrecht aufeinander stehen, muss ihr Skalarprodukt null sein.

$$(\rho\vec{e_\rho}) \cdot (\dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}) = \rho\dot{\rho}$$

Da $\rho = 0$ keinen Sinn ergibt, muss die $\dot{\rho} = 0$ gelten. Die Bewegung ist jetzt eine Kreisbewegung mit konstantem ρ. Damit die beiden Vektoren parallel zueinander sind muss $\rho\dot{\varphi} = 0$ gelten. Da auch hier $\rho = 0$ keinen Sinn ergibt, muss $dot\varphi = 0$ gelten. Die Richtung der Bewegung bleibt dann also konstant.

(b) Den Betrag der Zeit kann man durch einsetzen in die Formel von (a) errechnen.

$$\dot{\rho}(t) = \sigma_0 \cos\alpha$$

$$\dot{\varphi}(t) = \tan\alpha \, \frac{1}{\rho(t)} \sigma_0 \cos\alpha = \frac{\sin\alpha\sigma_0}{\rho(t)}$$

$$\vec{v} = \sigma_0 \cos\alpha \; \vec{e_\rho} + \rho(t) \cdot \frac{\sin\alpha\sigma_0}{\rho(t)} \vec{e_\varphi} = \sigma_0 \cos\alpha \; \vec{e_\rho} + \sin\alpha \; \sigma_0 \vec{e_\varphi}$$

Die Geschwindigkeit ist zeitlich konstant, also auch ihr Betrag.

$$|\vec{v}| = \sqrt{\sin^2\alpha \; \sigma_0^2 + \sigma_0^2 \cos^2\alpha} = \sigma_0$$

Den Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{v}$ bestimmen wir über das Skalarprodukt.

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = |\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \cos\alpha$$

[...00:35 und kein Ende in Sicht]

5 Kugelkoordinaten

(a)

$$\frac{\partial\vec{r}}{r} = (\cos\varphi \; \sin\vartheta, \sin\varphi \; \sin\vartheta, \cos\vartheta)$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\varphi} = (-r\sin\varphi \; \sin\vartheta, r\cos\varphi \; \sin\vartheta, 0)$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\vartheta} = (r\cos\varphi \; \cos\vartheta, r\sin\varphi \; \cos\vartheta, -r\sin\vartheta)$$

Um nun die Einheitsvektoren zu berechnen, muss man die verschiedenen partiellen Ableitungen durch ihre Beträge teilen.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial\vec{r}}{r}\right| &= \sqrt{\cos^2\varphi \; \sin^2\vartheta + \sin^2\varphi \; \sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta} \\
&= \sqrt{\sin^2\vartheta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\vartheta} \\
&= \sqrt{\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial\vec{r}}{\varphi}\right| &= \sqrt{r^2\sin^2\varphi \; \sin^2\vartheta + r^2\cos^2\varphi \; \sin^2\vartheta} \\
&= \sqrt{r^2\sin^2\vartheta} \\
&= r\sin\vartheta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial\vec{r}}{\vartheta}\right| &= \sqrt{r^2\cos^2\varphi\ \cos^2\vartheta + r^2\sin^2\varphi\ \cos^2\vartheta + r^2\sin^2\vartheta} \\
&= \sqrt{r^2\cos^2\vartheta + r^2\sin^2\vartheta} \\
&= \sqrt{r^2} \\
&= r
\end{aligned}$$

Nun kann man die Einheitsvektoren bestimmen.

$$\vec{e_r} = (\cos\varphi\ \sin\vartheta, \sin\varphi\ \sin\vartheta, \cos\vartheta)$$
$$\vec{e_\varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$
$$\vec{e_\vartheta} = (\cos\varphi\ \cos\vartheta, \sin\varphi\ \cos\vartheta, -\sin\vartheta)$$

Damit es sich um eine positiv orientierte Orthonormalbasis handelt, müssen die Skalarprodukte Null ergeben, außerdem muss das Spatprodukt Eins ergeben.

$$\begin{aligned}
\vec{e_r}\cdot\vec{e_\varphi} &= \cos\varphi\ \sin\vartheta\cdot(-\sin\varphi) + \sin\varphi\ \sin\vartheta\cdot\cos\varphi \\
&= \sin\vartheta\cdot(\sin\varphi\ \cos\varphi - \sin\varphi\ \cos\varphi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{e_r}\cdot\vec{e_\vartheta} &= \cos\varphi\ \sin\vartheta\cdot\cos\varphi\ \cos\vartheta + \sin\varphi\ \sin\vartheta\cdot\sin\varphi\ \cos\vartheta + \cos\vartheta\cdot(-\sin\vartheta) \\
&= \cos\vartheta\ \sin\vartheta\cdot(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos\vartheta\cdot(-\sin\vartheta) \\
&= \cos\vartheta\ \sin\vartheta - \cos\vartheta\ \sin\vartheta \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{e_\varphi}\cdot\vec{e_\vartheta} &= (-\sin\varphi)\cdot\cos\varphi\ \cos\vartheta + \cos\varphi\cdot\sin\varphi\ \cos\vartheta \\
&= \cos\vartheta\cdot(\cos\varphi\ \sin\varphi - \cos\varphi\ \sin\varphi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Berechnung des Spatproduktes:

$$\begin{aligned}
(\vec{e_r}\times\vec{e_\vartheta})\cdot\vec{e_\varphi} &= \begin{vmatrix} \cos\varphi\ \sin\vartheta & \sin\varphi\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi\ \cos\vartheta & \sin\varphi\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta \end{vmatrix} \\
&= \cos\varphi\ \sin\vartheta\ \cos\varphi\ (-\sin\vartheta) + \cos\vartheta(-\sin\varphi)\sin\varphi\ \cos\vartheta \\
&- \cos\varphi\ \cos\vartheta\ \cos\varphi\ \cos\vartheta - (-\sin\varphi)\sin\varphi\ \sin\vartheta(-\sin\vartheta) \\
&= -\cos^2\varphi\ \sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta\ \sin^2\varphi - \cos^2\vartheta\ \cos^2\varphi - \sin^2\vartheta\ \sin^2\varphi \\
&= -\sin^2\vartheta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - \cos^2\vartheta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \\
&= -\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta \\
&= -1
\end{aligned}$$

! Im Großmann (Mathematischer Einführungskurs für die Physik) ist immer von $(\vec{e_r}, \vec{e_\vartheta}, \vec{e_\varphi})$ als positiv orientierte ONB die Rede. Dies würde erklären, warum $(\vec{e_r}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_\vartheta})$ des Übungszettels eine negative orientierte ONB wäre, da bei der Vertauschung von Spalten die Determinante ihr Vorzeichen ändert.