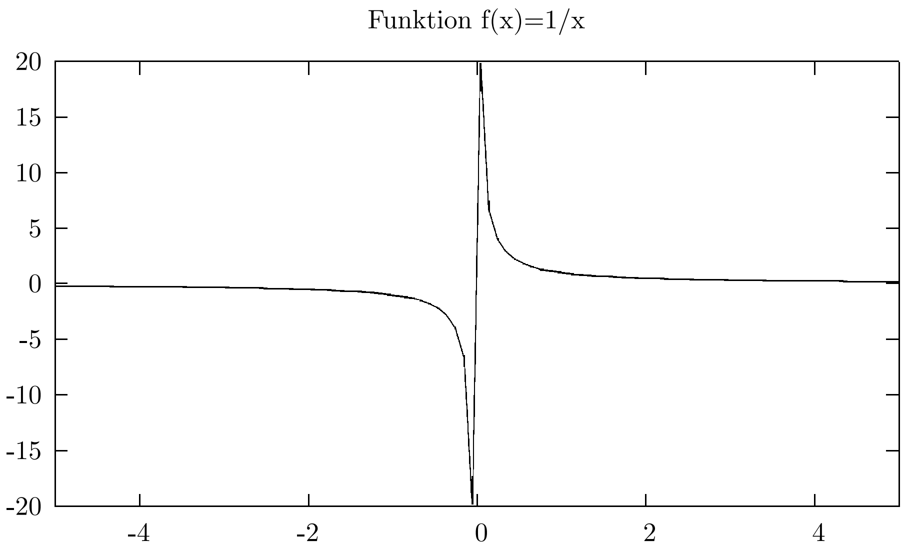
3 Übung zur Physik I - Blatt 3

Benedikt Birkenbach (3699455)
Gruppe 8, Rauno Buescher

3.1 Ableitungen

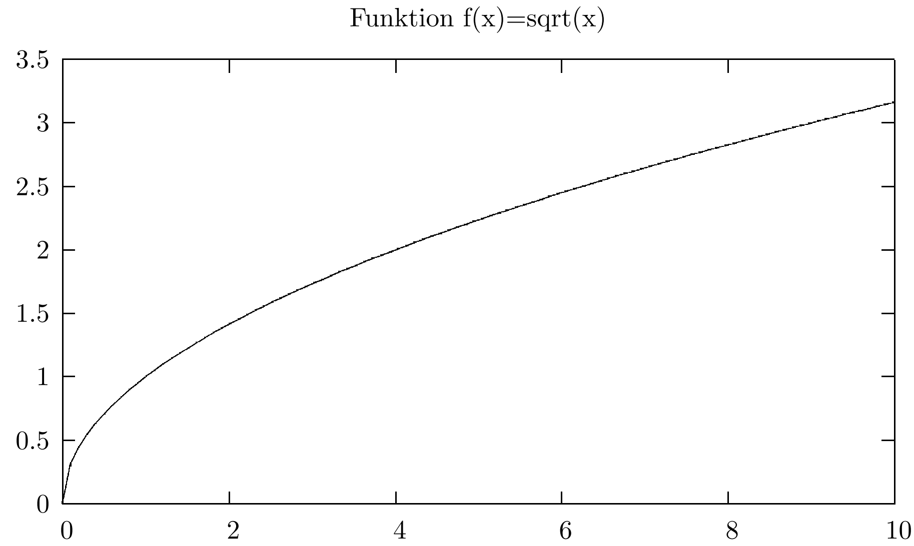
(a)



$$f(x) = \frac{1}{x} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Da $\frac{1}{0}$ nicht definiert ist, ist die Funktion und die Ableitung an der Stelle 0 nicht definiert.

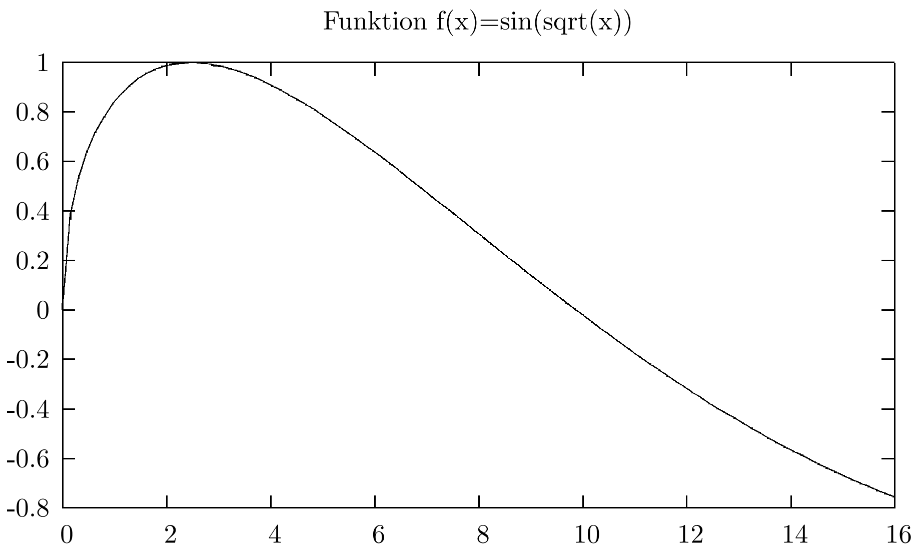
(b)



$$f(x) = \sqrt{x} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Die Funktion ist an der Stelle 0 definiert. Die Ableitung hingegen ist an der Stelle 0 nicht definiert, da $\frac{1}{0}$ nicht definiert ist.

(b)



$$f(x) = \sin\sqrt{x} \quad f'(x) = -\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

Die Funktion ist für 0 wohldefiniert. Die Ableitung ist wegen $2\sqrt{0} = 0$ für 0 nicht definiert.

(d)

$$f(x) = a^x = e^{x \ln a}$$
$$f'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a \quad \text{für } x > 0$$

(e)

$$f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$$
$$f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

(f)

$$f(x) = \tanh \omega t = \frac{\sinh \omega t}{\cosh \omega t}$$
$$f'(x) = \frac{\omega \cosh^2 \omega t - \omega \sinh^2 \omega t}{\cosh^2 \omega t} = \frac{\omega \underbrace{(\cosh^2 \omega t - \sinh^2 \omega t)}_{1}}{\cosh^2 \omega t} = \frac{\omega}{\cosh^2 \omega t}$$

(g)

$$f(x) = \cos^{-1} x$$
$$\text{aus } f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f^{-1} \cdot f'} \text{ folgt:}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3.2 Partielle Ableitungen

(a) $f(x) = |x|^n$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f(\vec{x}) &= (\partial_1 f(\vec{x}), \partial_2 f(\vec{x}), \partial_3 f(\vec{x})) \\
\partial_i f(\vec{x}) &= 2x_i \frac{n}{2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}^{\,n-2} \\
&= x_i n |\vec{x}|^{n-2} \\
\vec{\nabla} f(\vec{x}) &= (x_1 n |\vec{x}|^{n-2}, x_2 n |\vec{x}|^{n-2}, x_3 n |\vec{x}|^{n-2})
\end{aligned}$$

(b) $f(\vec{x}) = (\vec{x} \times \vec{a}) \cdot \vec{b})$

$$\begin{aligned}
f(\vec{x}) &= x_1a_2b_3 + x_2a_3b_1 + x_3a_1b_2 - x_3a_2b_1 - x_2a_1b_3 - x_1a_3b_2 \\
\partial_1 f(\vec{x}) &= a_2b_3 - a_3b_2 \\
\partial_2 f(\vec{x}) &= a_3b_1 - a_1b_3 \\
\partial_3 f(\vec{x}) &= a_1b_2 - a_2b_1 \\
\vec{\nabla} f(\vec{x}) &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= \vec{a} \times \vec{b}
\end{aligned}$$

(c) $f(\vec{x}) = \vec{x}^2$ und $\vec{x}(t) = x_0 \cos \omega t$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\vec{x}(t) &= \vec{x}_0(-\omega \sin \omega t) \\
\frac{df}{dx_i} &= 2x_i \\
d\vec{f} &= 2\vec{x}_0 \cos \omega t \cdot \vec{x}_0(-\omega \sin \omega t)
\end{aligned}$$

3.3 Höhenprofil

(a) Als erstes berechnen wir den Gradienten von $f(x, y)$.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\frac{1}{(2x^2 + 3y^2 - 4x + 2y - 2xy + 3)^2} \cdot (4x - 4 - 2y)$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{(2x^2 + 3y^2 - 4x + 2y - 2xy + 3)^2} \cdot (6y + 2 - 2x)$$
$$\vec{\nabla} f(x,y) = \left(-\frac{4x - 4 - 2y}{(2x^2 + 3y^2 - 4x + 2y - 2xy + 3)^2}, -\frac{6y + 2 - 2x}{(2x^2 + 3y^2 - 4x + 2y - 2xy + 3)^2}\right)$$

Der Gradient zeigt immer in Richtung der höchsten Steigung. Dort wo der Gradient null ist, gibt es keine Steigung, befindet sich also der Gipfel.

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{(2x^2 + 3y^2 - 4x + 2y - 2xy + 3)^2} \cdot (4x - 4 - 2y) \\
0 &= 4x - 4 - 2y \\
y &= 2x - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{(2x^2 + 3y^2 - 4x + 2y - 2xy + 3)^2} \cdot (6y + 2 - 2x) \\
0 &= 6y + 2 - 2x \\
0 &= 6(2x - 2) + 2 - 2x \\
0 &= 10x - 10 \\
x &= 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y &= 2x - 2 \\
y &= 2 - 2 \\
y &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(1,0) &= \frac{1}{2-4+3} f(1,0) \qquad = \\
1
\end{aligned}
$$

Der Gipfel befindet sich bei $\vec{r} = (1, 0, 1)$.

(b) Wir berechnen den Gradienten des Punktes und bewegen uns in die entgegengesetzte Richtung des Gradienten, da es nur einen Gipfel und keinen Kamm des Vulkans gibt.

$$\vec{\nabla} f(1,1) = (\frac{1}{8}, -\frac{3}{8})$$

$$|\vec{\nabla} f(1,1)| = \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{9}{64}} = \sqrt{\frac{5}{32}}$$

$$-\nabla f(1,1) \cdot \vec{e_x} = -\frac{1}{8}$$

$$\frac{-\frac{1}{8}}{\sqrt{\frac{5}{32}}} = \cos\varphi$$

$$\varphi \approx 108,435$$

Man muss einen Winkel von ca. $108,5°$ zu x-Achse einschlagen, um den steilsten Abstieg zu nehmen.

3.4 Zykloide

3.5 Kugelstoßen

(a) Wir benutzen die allgemeine Formel $\vec{x} = \vec{x_0} + \vec{v_0} t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$. Die einzige Kraft die wirkt ist die Schwerkraft. $\vec{v_0}$ ist gegeben und $\vec{x_0}$ ebenfalls. Daraus folgt die Newtonsche Bewegungsgleichung:

$$x(t) = v_0 \cos\varphi \; t$$

$$z(t) = z_0 + v_0 \sin\varphi \; t - \frac{1}{2} g t^2$$

(b) Wir bestimmen die Maximale Steighöhe. Diese ist genau dann erreicht, wenn die Geschwindigkeit in z-Richtung 0 ist.

$$\dot{z}(t) = v_0 \sin\varphi - gt$$

$$\begin{aligned} 0 &= v_0 \sin\varphi - gt \\ gt &= v_0 \sin\varphi \\ t &= \frac{v_0 \sin\varphi}{g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{max} &= z_0 + v_0 \frac{v_0 \sin\varphi}{g} \sin\varphi - \frac{1}{2} g (\frac{v_0 \sin\varphi}{g})^2 \\ z_{max} &= z_0 + \frac{2v_0^2 \sin^2\varphi}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2\varphi}{g} \\ z_{max} &= z_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\varphi}{g} \end{aligned}$$

Die Gesamtflugzeit t_g ist an dem Punkt $z = 0$ erreicht.

$$\begin{aligned} 0 &= z_0 + v_0 t \sin\varphi - \frac{1}{2} g t^2 \\ 0 &= -\frac{2z_0}{g} - \frac{2v_0 \sin\varphi}{g} t + t^2 \\ t_g &= \frac{v_0 \sin\varphi}{g} + \sqrt{\left(-\frac{2v_0 \sin\varphi}{g}\right)^2 + \frac{2z_0}{g}} \end{aligned}$$

Die Stoßweite kann man durch Einsetzen von t_g in $x(t)$ errechnen.

$$x_{max} = v_0 \cos\varphi \; t_g$$

Den Betrag der Endgeschwindigkeit erreichen wir über die Ableitung der Bewegungsgleichung und Einsetzen der Gesamtflugzeit.

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot t_g$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\sin^2\varphi + (\cos\varphi - g t_g)^2}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi - 2\cos\varphi g t_g + t_g^2}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{1 - 2\cos\varphi g t_g + g^2 t_g^2}$$

(c) Da $z_0 = 0$ fällt es aus den Gleichungen raus. Wir setzen $z = 0$ und erhalten die Weite des Wurfs, wann wir dieser maximal?

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos\varphi \, t \\ t &= \frac{x}{v_0 \cos\varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= v_0 \sin\varphi \frac{x}{v_0 \cos\varphi} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\varphi} \right)^2 \\ 0 &= x \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - x^2 \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\varphi} \\ x &= \frac{v_0^2 \underbrace{2 \cos\varphi \sin\varphi}_{\sin 2\varphi}}{g} \\ x &= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi \end{aligned}$$

Die Sinus-Funktion ist maximal 1. Wann ist dies der Fall??

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi &= 1 \\ \varphi &= \frac{\sin^{-1} 1}{2} \\ \varphi &= 46^\circ \end{aligned}$$

$\vec{r}(t) = (v_0 \cos\varphi \, t, 0, v_0 \sin\varphi \, t - \frac{1}{2} g t^2)$

Die Wurfbahn lautet:

$$z(x) = x \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - x^2 \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\varphi} = x \tan\varphi - x^2 \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\varphi}$$