2 Übung zur Physik I - Blatt 2

Benedikt Birkenbach (3699455)
Gruppe 8, Rauno Buescher

2.1 Orthogonale Transformation

$$\vec{e_i'} = \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\vec{e_j} \text{ und } \vec{e_i} = \sum_{j=1}^{n} M_{ij}^{-1}\vec{e_j}$$

2.2 Determinante

a)

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\
&= (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})\cdot(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})\cdot(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}) \\
&= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} \\
&- (a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} + a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} + a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} + a_{12}b_{22}a_{22}b_{21} \\
&= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{12}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{11}a_{22})\cdot(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\
&= \det(a)\cdot\det(b)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\Omega(v_1,v_2,v_3)\Omega(w_1,w_2,w_3) &= \begin{vmatrix} (v_1\cdot e_1) & (v_2\cdot e_2) & (v_1\cdot e_3) \\ (v_2\cdot e_1) & (v_1\cdot e_2) & (v_2\cdot e_3) \\ (v_3\cdot e_1) & (v_3\cdot e_2) & (v_3\cdot e_3) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (w_1\cdot e_1) & (w_1\cdot e_2) & (w_1\cdot e_3) \\ (w_2\cdot e_1) & (w_2\cdot e_2) & (w_2\cdot e_3) \\ (w_3\cdot e_1) & (w_3\cdot e_2) & (w_3\cdot e_3) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (v_{1_1}) & (v_{1_2}) & (v_{1_3}) \\ (v_{2_1}) & (v_{2_2}) & (v_{2_3}) \\ (v_{3_1}) & (v_{3_2}) & (v_{3_3}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (w_{1_1}) & (w_{2_1}) & (w_{3_1}) \\ (w_{1_2}) & (w_{2_2}) & (w_{3_2}) \\ (w_{1_3}) & (w_{2_3}) & (w_{3_3}) \end{vmatrix} \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} (v_{1_1}) & (v_{1_2}) & (v_{1_3}) \\ (v_{2_1}) & (v_{2_2}) & (v_{2_3}) \\ (v_{3_1}) & (v_{3_2}) & (v_{3_3}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (w_{1_1}) & (w_{2_1}) & (w_{3_1}) \\ (w_{1_2}) & (w_{2_2}) & (w_{3_2}) \\ (w_{1_3}) & (w_{2_3}) & (w_{3_3}) \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$= \det\begin{pmatrix} (v_{1_1}w_{1_1}+v_{1_2}w_{1_2}+v_{1_3}w_{1_3}) & (v_{1_1}w_{2_1}+v_{1_2}w_{2_2}+v_{1_3}w_{2_3}) & (v_{1_1}w_{3_1}+v_{1_2}w_{3_2}+v_{1_3}w_{3_3}) \\ (v_{2_1}w_{1_1}+v_{2_2}w_{1_2}+v_{2_3}w_{1_3}) & (v_{2_1}w_{2_1}+v_{2_2}w_{2_2}+v_{2_3}w_{2_3}) & (v_{2_1}w_{3_1}+v_{2_2}w_{3_2}+v_{2_3}w_{3_3}) \\ (v_{3_1}w_{1_1}+v_{3_2}w_{1_2}+v_{3_3}w_{1_3}) & (v_{3_1}w_{2_1}+v_{3_2}w_{2_2}+v_{3_3}w_{2_3}) & (v_{3_1}w_{3_1}+v_{3_2}w_{3_2}+v_{3_3}w_{3_3}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (\vec{v_1}\cdot\vec{w_1}) & (\vec{v_1}\cdot\vec{w_2}) & (\vec{v_1}\cdot\vec{w_3}) \\ (\vec{v_2}\cdot\vec{w_1}) & (\vec{v_2}\cdot\vec{w_2}) & (\vec{v_2}\cdot\vec{w_3}) \\ (\vec{v_3}\cdot\vec{w_1}) & (\vec{v_3}\cdot\vec{w_2}) & (\vec{v_3}\cdot\vec{w_3}) \end{vmatrix}$$

Da gleich zu Anfang die Vektoren in die einzelnen Komponenten zerlegt werden, spielt die Basis keine Rolle. Wichtig ist nur das v_i und w_i die gleiche Basis haben.

2.3 ICE Shuttle

a) $\vec{a} = 0,5\frac{m}{s^2}$ $\quad V_{max} = 300\frac{km}{h} = \frac{250}{3}\frac{m}{s}$

$$\begin{aligned}\frac{250}{3} &= t \cdot 0,5 \\ \frac{250}{3} \cdot 0,5 &= t \\ t &= \frac{500}{3}\end{aligned}$$

Der Zug benötigt also $166,\bar{6}$ Sekunden um die Höchstgeschwindigkeit zu erreichen.

b) siehe Anhang.

c) Zug A benötigt zum Bremsen und beschleunigen eine Zeit von $\frac{1000}{3}$ Sekunden. In dieser Zeit legt Zug B eine Strecke von

$$\frac{1000}{3} \cdot \frac{250}{3} = \frac{250000}{9}$$

Metern zurück. Zug A legt in der Zeit des Beschleunigen und Bremsens eine Strecke von

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1000}{3}\right)^2 = \frac{125000}{9}$$

Metern zurück. Die Zeit, welche Zug A verliert ist

$$\frac{3}{250} \cdot \frac{250000}{9} = \frac{500}{3} = 166,\bar{6}$$

Sekunden.

2.4 Beschleunigen

a) $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ $\quad \vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{dr}{dt}(\rho\cos(\omega t), \rho\sin(\omega t), z_0) \\ &= (-\rho\omega\sin(\omega t), \rho\omega\cos(\omega t), 0) \\ |\vec{v}(t)| &= \sqrt{(-\rho\omega\sin(\omega t))^2 + (\rho\omega\cos(\omega t))^2} \\ &= \sqrt{\rho^2\omega^2 \underbrace{(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t))}_{1}} \\ &= \rho\omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= (-\rho\omega^2\cos(\omega t), -\rho\omega^2\sin(\omega t), 0) \\ |\vec{a}(t)| &= \sqrt{(-\rho\omega^2\cos(\omega t))^2 + (-\rho\omega^2\sin(\omega t))^2} \\ &= \sqrt{\rho^2\omega^4 \underbrace{(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))}_{1}} \\ &= \rho\omega^2\end{aligned}$$