1 Übungen zur Physik I - Blatt 1

1.1 Abschätzungen

a) Ein Pingpongball hat einen Durchmesser von ca. $3 \cdot 10^{-2}$m. Der Atomkern des Wasserstoffatoms hingegen ein paar m^{-15}. Daraus folgt, daß wir eine Vergrößerung um etwa den Faktor 10^{13} haben. Für daß Elektron ist bis zur Messgrenze von 10^{-18}m keine Ausdehnung zu erkennen. Es gibt aber einen klassischen Elektronenradius von $2,818 \cdot 10^{-15}$m. Würde man diesen hier benutzen, wäre das Elektron im etwa genausogroß wie der Atomkern. Gehen wir allerdings von den Messergebnissen aus, so hätte das Elektron einen kleineren Radius als 10^{-3}m oder kleiner als ein Millimeter. Der bohrsche Radius das Wassterstoffatoms beträgt $0,529 \cdot 10^{-10}$m. Vergrößern wir diesen um den Faktor 10^{13} so erhalten wir einen Radius von $0,529 \cdot 10^{3}$m, was einer Strecke von 529m entspricht.

b) Wäre die Sonne so groß wie ein Fußball, dann wäre im Vergleich dazu die Erde ca. 2mm im Durchmesser und 23,6m weit von dem Fußball (Sonne) entfernt.

c) Die Lichtgeschwindigkeit beträgt 299 792 458m/s. Die zeitlich Verzögerung beträgt daher nur den Bruchteil einer Sekunde. Nehmen wir an, die Strecke zwischen Sidney und Deutschland wäre 20 000km. Da die Radiowellen ersteinmal zur Ionospähre und wieder zurück müssen (eventuell sogar mehrmals), rechnen wir großzügig nocheinmal 10 000 km drauf. Die Radiowellen bewegen sich also mit ca. 300 000 000m/s fort und müssen im etwa eine Strecke von 10 000 000m zurücklegen.

$$\frac{10000000}{300000000} = \frac{1}{30}$$

Die Verzögerung würde also ca. $\frac{1}{30}$ Sekunde betragen.

1.2 Vektorrechnung

a) siehe Beiblatt.

b) linear abhängig wenn $\lambda_a\vec{a} + \lambda_b\vec{b} + \lambda_c\vec{c} = 0$ für $\lambda_x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\lambda_a 2 + u &= 0 \\
\lambda_a &= -\frac{u}{2} \\
-\frac{u}{2}u + 4 + 2u &\neq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 + \lambda_b u &= 0 \\
\lambda_b &= -\frac{2}{u} \\
u - \frac{8}{u} + 2u &\neq 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß es keine nicht-triviale Lösung gibt. Also sind die Vektoren linear unabhängig.

c)

$$\begin{aligned}
|\vec{c}| &= \sqrt{0^2 + (2u)^2 + 4^2} \\
&= \sqrt{4u^2 + 16}
\end{aligned}$$

d) $\vec{a} \perp \vec{b}$ genau dann, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= 4u - 4u \\
&= 0
\end{aligned}$$

Die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind für ein beliebiges u orthogonal zueinander.

$\vec{a} \perp \vec{c}$ genau dann, wenn $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$.

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 2u^2$$

$$\begin{aligned}
2u^2 &= 0 \\
u &= 0
\end{aligned}$$

Die beiden Vektoren sind genau dann orthogonal, wenn $u = 0$ ist.

e)

$$\begin{aligned}
|\vec{a}| &= \sqrt{5} \\
|\vec{c}| &= \sqrt{20} \\
\vec{a} \cdot \vec{c} &= 8 \\
cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{c}) &= \frac{8}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}} \\
cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{c}) &= \frac{4}{5} \\
\sphericalangle(\vec{a},\vec{c}) &\approx 36,87^\circ
\end{aligned}$$

1.3 Doppeltes Kreuzprodukt

$$\begin{aligned}
(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) &= \\
((a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e_1} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e_2} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e_3}) &\cdot \\
((c_2d_3 - c_3d_2)\vec{e_1} + ((c_3d_1 - c_1d_3)\vec{e_2} + (c_1d_2 - c_2d_1)\vec{e_3}) &= \\
((a_2b_3)\vec{e_1} - (a_3b_2)\vec{e_1} + (a_3b_1)\vec{e_2} - (a_1b_3)\vec{e_2} + (a_1b_2)\vec{e_3} - (a_2b_1)\vec{e_3}) &\cdot \\
((c_2d_3)\vec{e_1} - (c_3d_2)\vec{e_1} + (c_3d_1)\vec{e_2} - (c_1d_3)\vec{e_2} + (c_1d_2)\vec{e_3} - (c_2d_1)\vec{e_3}) &= \\
a_2b_3c_2d_3 - a_2b_3c_3d_2 - a_3b_2c_2d_3 + a_3b_2c_3d_2 + a_3b_1c_3d_1 - a_3b_1c_1d_3 &- \\
a_1b_3c_3d_1 + a_1b_3c_1d_3 + a_1b_2c_1d_2 - a_1b_2c_2d_1 - a_2b_1c_1d_2 + a_2b_1c_2d_1 &= \\
a_2b_3c_2d_3 + a_3b_2c_3d_2 + a_3b_1c_3d_1 + a_1b_3c_1d_3 + a_1b_2c_1d_2 + a_2b_1c_2d_1 &- \\
(a_2b_3c_3d_2 + a_3b_2c_2d_3 + a_3b_1c_1d_3 + a_1b_3c_3d_1 + a_1b_2c_2d_1 + a_2b_1c_1d_2) &= \\
(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\cdot(b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3) &- \\
(a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3)\cdot(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) &= \\
(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) &
\end{aligned}$$

Als erstes wird das Kreuzprodunkt ausmultipliziert. Mit Hilfe des Kroneckersymbols fallen viele Produkte raus. Durch Ausklammern kommen wir schließlich auf die geforderte Form.

1.4 Vektorzerlegung

a)

$$\begin{aligned}
28 &= \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (3a)^2} \\
784 &= a^2 + 4a^2 + 9a^2 \\
784 &= a^2(1+4+9) \\
\frac{784}{14} &= a^2 \\
\sqrt{56} &= a_1 \\
-\sqrt{56} &= a_2
\end{aligned}$$

b) $\vec{F} = \begin{pmatrix} \sqrt{56} \\ 2\sqrt{56} \\ 3\sqrt{56} \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\vec{F_{\|}} = \vec{e}(\vec{e} \cdot \vec{F})$

$$\begin{aligned}
\vec{F_{\|}} &= \vec{e}(\sqrt{56}\frac{1}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{56}\frac{1}{\sqrt{2}}) \\
\vec{F_{\|}} &= \vec{e}(4\frac{\sqrt{56}}{\sqrt{2}}) \\
\vec{F_{\|}} &= \begin{pmatrix} 2\sqrt{56} \\ 0 \\ 2\sqrt{56} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\vec{F_{\perp}} = \vec{F} - F_{\|}$

$$\begin{aligned}
\vec{F_{\perp}} &= \begin{pmatrix} \sqrt{56} \\ 2\sqrt{56} \\ 3\sqrt{56} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\sqrt{56} \\ 0 \\ 2\sqrt{56} \end{pmatrix} \\
\vec{F_{\perp}} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{56} \\ 2\sqrt{56} \\ \sqrt{56} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\vec{e'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\vec{F_{\|}} &= \vec{e}(-\frac{2\sqrt{56}}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{56}\sqrt{2}) \\
\vec{F_{\|}} &= \vec{e}(-\frac{2\sqrt{56}}{\sqrt{2}} + \frac{6\sqrt{56}}{\sqrt{2}}) \\
\vec{F_{\|}} &= \vec{e}(\frac{4\sqrt{56}}{\sqrt{2}}) \\
\vec{F_{\|}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{56} \\ 4\sqrt{56} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{F_{\perp}} &= \begin{pmatrix} \sqrt{56} \\ 2\sqrt{56} \\ 3\sqrt{56} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{56} \\ 4\sqrt{56} \end{pmatrix} \\
\vec{F_{\perp}} &= \begin{pmatrix} \sqrt{56} \\ 4\sqrt{56} \\ -\sqrt{56} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c) Als erstes rechnen wir $200km/h$ in m/s um.

$$200km/h = \frac{200000}{3600}m/s = \frac{500}{9}m/s$$

Jetzt berechnen wir die Komponentendarstellung der Windegeschwindigkeit. Der Winkel zu $\vec{e_1}$(West-Ost-Achse) beträgt 45°. Der Betrag von $\vec{V_W}$ ist 20. Die Komponenten lassen sich mit Hilfe von cos und sin berechnen.

$$\vec{V_W} = \begin{pmatrix} 20\cos(45°) \\ 20\sin(45°) \end{pmatrix}$$

Die Geschwindigkeit des Flugzeuges beträgt $\frac{500}{9}m/s$, ist also Betrag des Vektors $\vec{V_F}$. $\vec{V_F} + \vec{V_W}$ ergeben zusammen $\vec{V_G}$, die Geschindigkeit des Flugzeugs über dem Grund mit der Richtung Süden. Aus diesen Informationen ergeben sich drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
20\cos(45°) + V_{F1} &= 0 && (1)\\
20\sin(45°) + V_{F2} &= V_{G1} && (2)\\
\sqrt{V_{F1}^2 + V_{F2}^2} &= \frac{500}{9} && (3)\\
V_{F1} &= -20\cos(45°) && (1)\\
\sqrt{(-20\cos(45°))^2 + V_{F2}^2} &= \frac{500}{9} && (3)\\
(-20\cos(45°))^2 + V_{F2}^2 &= \frac{250000}{81}\\
V_{F2}^2 &= \frac{250000}{81} - 200\\
V_{F2}^2 &= 2886\frac{34}{81}\\
V_{F2} &= \pm\sqrt{2886\frac{34}{81}}
\end{aligned}$$

Wegen Richtung Süden muss man beim Ergebnis von (3) $-\sqrt{2886\frac{34}{81}}$ wählen.

$$\begin{aligned}
20\sin(45°) - \sqrt{2886\frac{34}{81}} &= V_{G1} && (2)\\
V_{G1} &\approx -39,58
\end{aligned}$$

Für Norden müssen wir $V_{F2} = \sqrt{2886\frac{34}{81}}$ wählen.

$$\begin{aligned}
20\sin(45°) + \sqrt{2886\frac{34}{81}} &= V_{G1} && (2)\\
V_{G1} &\approx 67.87
\end{aligned}$$

1.4 Vektorzerlegung

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -20\cos(45^\circ) \\ -\sqrt{2886\frac{34}{81}} \end{pmatrix} &= \frac{500}{9}\cos\varphi \\
\cos\varphi &= \frac{9\sqrt{2886\frac{34}{81}}}{500} \\
\cos\varphi &= 14,7474223^\circ
\end{aligned}$$

Der Pilot muss, wenn er nach Süden fliegen möchte, sein Flugzeug in Richtung $194,7474223^\circ$ richten und bewegt sich mit ca. $39,58m/s$ über dem Grund fort. Wenn er nach Norden fliegen möchte, belegt er einen Kurs von $345,2525777^\circ$ mit einer Geschwindigkeit von ca. $67.87m/s$ über dem Grund.