Universität zu Köln
Priv.-Doz. Dr. S. Scheidl
Prof. Dr. H. Micklitz

WS 2002/2003
Zülpicher Strasse 77
50937 Köln

Übungen zu Physik I **Blatt 6**

Abgabe: 28.11.2002 *Besprechung: 2.12.2002*

Aufgabe 6.1: Uneigentliche Integrale (2+2+2+2 Punkte)

Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale (sofern sie konvergent sind; für welche s ist das der Fall?) als Grenzfälle bestimmter Integrale:

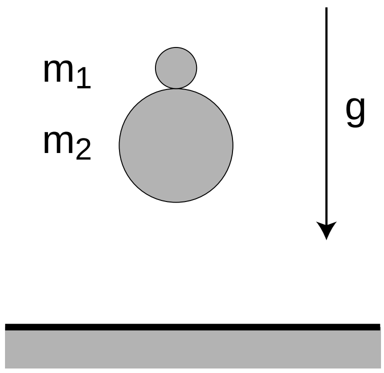
(a) $\displaystyle\int_1^\infty (1 + \frac{1}{x^2})\, dx;$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^s}\, dx;$ Tipp: man substituiere $y = 1 + x^2$;

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^s}\, dx;$

(d) $\displaystyle\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{\alpha c} \frac{x}{1+x^2}\, dx$ in Abhängigkeit von $\alpha > 0$.

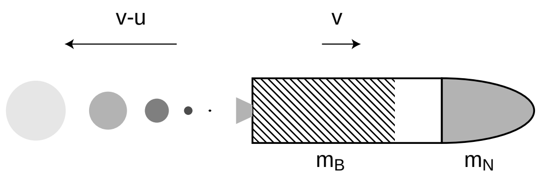
Aufgabe 6.2: Superflummis (10 Punkte)



Zwei übereinanderliegende, vollkommen elastische Flummis werden aus einer Höhe h_0 fallengelassen. Wie muss man das Massenverhältnis $\eta = m_2/m_1$ wählen, damit nach dem Aufprall am Boden der obere Flummi eine möglichst große Höhe erreicht? Wie groß ist diese maximal? Welche Höhe erreicht dann der untere Flummi?

Dazu kann es hilfreich sein sich vorzustellen, dass beide Flummis nicht direkt übereinander liegen, sondern einen infinitesimal kleinen Abstand zueinander haben. Die Höhen seien hier gemessen bezüglich der Lage von m_2 auf dem Boden und m_1 direkt auf m_2.

Aufgabe 6.3: Raketenantrieb (4+2+2+3 Punkte)



Eine Rakete bestehe aus einer Nutzlast der Masse m_N und einem Brennstoffvorrat der Masse m_B. Anfangs (bei $t = 0$) ruhe die Rakete mit einem Brennstoffvorrat $m_\mathrm{B}(0)$. Der Brennstoff wird im Lauf der Zeit $t > 0$ verbrannt, so dass die Gesamtmasse $m(t) = m_\mathrm{N} + m_\mathrm{B}(t)$ zeitabhängig ist. Bei der Verbrennung werden die Abgase mit einer Geschwindigkeit u relativ zur Rakete ausgestoßen.

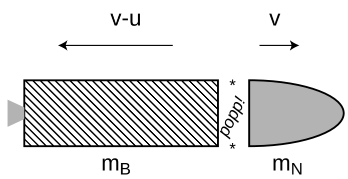
Im schwerefreien Raum folgt die Rakete der Bewegungsgleichung

$$m\frac{dv}{dt} + u\frac{dm}{dt} = 0$$

(a) Bei $t = 0$ setze die Verbrennung ein. Sie werde so gedrosselt, dass $m_\mathrm{B}(t) = m_\mathrm{B}(0)\ e^{-\gamma t}$ für $t \geq 0$ mit einer gewissen Rate $\gamma > 0$. Berechnen Sie $v(t)$ ausgehend von obiger Bewegungsgleichung. Hinweis: Separation der Variablen.

(b) Wie groß ist die erreichte Endgeschwindigkeit? Hängt sie davon ab, wie schnell der Brennstoff vebrannt wird, also von γ?

Man betrachte nun zum Vergleich die Situation, in der bei $t = 0$ der gesamte Brennstoffvorrat (ohne Verlust an Gesamtmasse) so abgesprengt wird, dass sich der Vorrat und die Nutzlast mit einer Geschwindigkeit u voneninander wegbewegen.

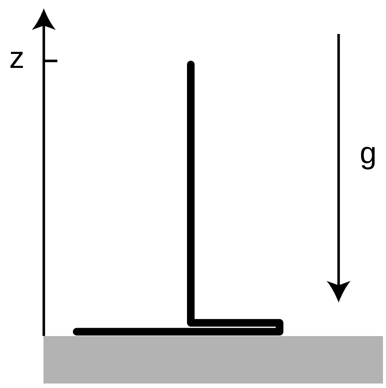


(c) Man berechne die resultierende Geschwindigkeit der Nutzlastkapsel.

(d) Betrachten Sie die Endgeschwindigkeiten aus (b) und (c) als Funktionen des Nutzlastanteils $\eta = m_\mathrm{N}/[m_\mathrm{N} + m_\mathrm{B}(0)]$. Skizzieren Sie beide Funktionen. Für welche η ist welche Geschwindigkeit größer?

Aufgabe 6.4: Fallende Kette (2+4+4 Punkte)

Eine flexible dünne Kette der Länge l und Masse m (die über die ganze Länge gleichverteilt sei) werde an einem Ende so festgehalten, dass das andere Ende gerade eine Unterlage berührt. Bei $t = 0$ werde die Kette dann fallengelassen, d.h. zu einem späteren Zeitpunkt befindet sich ein Anteil der Länge $z(t)$ im Fall, während der andere Teil der Länge $l - z(t)$ schon auf der Unterlage ruht.



(a) Wie lautet $z(t)$ für $t > 0$?

(b) Wo befindet sich der Schwerpunkt $R(t)$ für $t > 0$ und wie groß ist seine Beschleunigung?

(c) Welche Gesamtkraft wird von der Kette auf die Unterlage ausgeübt? Hinweis: Ein Impulsübertrag pro Zeiteinheit ist auch eine Kraft.