UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PRIV.-DOZ. DR. S. SCHEIDL
PROF. DR. H. MICKLITZ

WS 2002/2003
ZÜLPICHER STRASSE 77
50937 KÖLN

Übungen zu Physik I **Blatt 3**

Abgabe: 7.11.2002 *Besprechung: 11.11.2002*

Die Aufgaben dieses Blattes sollen wie alle weiteren schriftlich bearbeitet werden. Kennzeichnen Sie Ihre individuellen Abgaben gut leserlich mit **Ihrem Namen** und dem **Übungsgruppenleiter** / der **Übungsgruppennummer**. Andernfalls können Ihnen leider **keine Punkte** gutgeschrieben werden.

Aufgabe 3.1: Ableitungen (2+2+2+2+2+2+2 Punkte)

Skizzieren Sie folgende Funtionen und diskutieren Sie, ob ihre Ableitung bei $x = 0$ wohldefiniert ist:

(a) $f(x) = 1/x$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$

(c) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

(d) $f(x) = a^x$, (Hinweis: $a^x = e^{x \ln a}$)

(e) $f(x) = \cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $f(x) = \sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

(f) $f(t) = \tanh(\omega t) := \dfrac{\sinh(\omega t)}{\cosh(\omega t)}$

(g) $f(x) = \arccos(x)$, wobei $y = \arccos(x)$ die Umkehrfunktion von $x = \cos(y)$ ist, die hier für $y \in [\pi, 2\pi]$ betrachtet werden soll.

Aufgabe 3.2: Partielle Ableitungen (3+3+3 Punkte)

Berechnen Sie im dreidimensionalen Raum

(a) den Gradienten von $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^n$

(b) den Gradienten von $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$

(c) die totale Zeitableitung von $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$ längs der Bahn $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \cos(\omega t)$

Aufgabe 3.3: Höhenprofil (4+4 Punkte)

Sie befinden sich auf dem Vulkan Ätna mit dem Höhenprofil

$$z = f(x, y) = \frac{1}{2x^2 + 3y^2 - 4x + 2y - 2xy + 3}.$$

(a) Wo befindet sich der Gipfel? Bestimmen Sie ihn durch Untersuchung des Gradienten!

(b) Leider bricht der Vulkan aus, als Sie sich gerade bei $x = y = 1$ befinden. Welche Richtung – gemessen am Winkel zur x Achse – müssen Sie einschlagen, um den steilsten Abstieg nehmen zu können?

Aufgabe 3.4: Zykloide (4+4 Punkte)

Ein Motorrad fährt mit konstanter Geschwindigkeit v_0 auf einer geraden Straße (in x-Richtung). Auf dem Hinterreifen (Radius r_0) klebt ein Kaugummi, der als Punktteilchen aufgefasst werden kann. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich die Hinterachse bei $x = 0$ und der Kaugummi auf dem Boden.

(a) Geben Sie die Bahnkurve des Punktes (auch Zykloide genannt) als Funktion der Zeit t an und zeichnen Sie diese.

(b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes und diskutieren Sie diese Ergebnisse insbesondere an den Umkehr- und Scheitelpunkten der Zykloide.

Aufgabe 3.5: Kugelstoßen (2+6+6 Punkte)

Sie nehmen an einem Kugelstoß-Wettbewerb teil. Zur Vereinfachung der Betrachtung wollen wir annehmen, dass Sie der Kugel (Masse m) beim Abstoß eine Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0 = v_0(\cos\phi_0, 0, \sin\phi_0)$ auf Schulterhöhe z_0 verpassen können.

(a) Erstellen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung für die als punktförmig zu behandelnde Kugel im Schwerefeld der Erde. Die Luftreibung sei vernachlässigbar.

(b) Bestimmen Sie die maximale Steighöhe der Kugel, ihre Gesamtflugzeit, die Stoßweite, und den Betrag der Endgeschwindigkeit als Funktion des Winkels ϕ_0.

(c) Nehmen Sie an, dass die Abstoßhöhe z_0 gegenüber der Steighöhe vernachläsigt werden kann, d.h., setzen Sie nun $z_0 = 0$. Unter welchem Winkel muss die Kugel (bei festem Betrag v_0) abgestoßen werden, damit die Stoßweite maximal wird? Berechnen und skizzieren Sie $\mathbf{r}(t) = (x(t), 0, z(t))$ und bestimmen Sie die Wurfbahn $z(x)$ aus $x(t)$ und $z(t)$ durch Elimination von t.