UNIVERSITÄT ZU KÖLN
PRIV.-DOZ. DR. S. SCHEIDL
PROF. DR. H. MICKLITZ

WS 2002/2003
ZÜLPICHER STRASSE 77
50937 KÖLN

Übungen zu Physik I **Blatt 2**

Abgabe: 31.10.2002 *Besprechung: 4.11.2002*

Die Aufgaben dieses Blattes sollen wie alle weiteren schriftlich bearbeitet werden. Kennzeichnen Sie Ihre individuellen Abgaben gut leserlich mit **Ihrem Namen** und dem **Namen Ihres Übungsgruppenleiters**.

Aufgabe 2.1: Orthogonale Transformation (5 Punkte)

Betrachten Sie den Wechsel von einer Basis $\{\mathbf{e}_i\}$ eines n-dimensionalen Vektorraums auf eine andere Basis $\{\mathbf{e}'_i\}$. Beide Basen seien orthonormiert und stehen über die Transformation

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\mathbf{e}_j$$

in Beziehung. Zeigen Sie, dass die inverse Matrix gleich der "transponierten" Matrix ist, d.h. $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{\mathrm{T}}$, oder

$$M^{-1}{}_{ij} = M^{\mathrm{T}}{}_{ij} = M_{ji}$$

in Komponenten.

Aufgabe 2.2: Determinante (4+6 Punkte)

(a) Für zwei $n \times n$ Matrizen A und B gilt der Determinanten-Multiplikationssatz

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Verifizieren Sie dies im Spezialfall von 2×2 Matrizen, für die gilt: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

(b) Das Spatprodukt dreier Vektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ im $\mathbb{R}^3$ kann mit einer willkürlich ausgewählten positiv orientierten Orthonormalbasis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ durch

$$\Omega(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3) := (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)\cdot \mathbf{v}_3 = \det\begin{pmatrix} (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{e}_1) & (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{e}_2) & (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{e}_1) & (\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{e}_2) & (\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{e}_1) & (\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{e}_2) & (\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{e}_3) \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Zeigen Sie

$$\Omega(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)\,\Omega(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3) = \det\begin{pmatrix} (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{w}_1) & (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{w}_2) & (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{w}_3) \\ (\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{w}_1) & (\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{w}_2) & (\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{w}_3) \\ (\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{w}_1) & (\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{w}_2) & (\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{w}_3) \end{pmatrix}$$

und folgern Sie hieraus, dass die Definition von $\Omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ unabhängig von der speziellen Wahl der positiv orientierten ONB $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ist.

Hinweise: Für eine beliebige Matrix $\mathbf{M}$ gilt: $\det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{M}^{\mathrm{T}})$. Für einen beliebigen Vektor $\mathbf{v}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

Aufgabe 2.3: ICE Shuttle (1+4+4 Punkte)

Das neue ICE Shuttle zwischen Köln und Frankfurt erreicht eine Maximalgeschwindigkeit von 300 km/h und eine Beschleunigung von ca. 0.5 m/s^2 (dies gelte zur Vereinfachung beim Anfahren wie beim Bremsen). Leider hält das Shuttle häufig an einer Zwischenstation wie Montabaur, Limburg oder Siegburg.

(a) Wie lange braucht ein Shuttle, um aus dem Stand die Maximalgeschwindigkeit zu erreichen?

(b) Vergleichen Sie Zug A, der aus maximaler Geschwindigkeit abbremst und nach dem Halt sofort wieder bis auf Höchstgeschwindigkeit anfährt, mit Zug B, der mit Höchstgeschwindigkeit durchfährt.

Skizzieren Sie hierzu jeweils $v(t)$ und $x(t)$. Nehmen Sie an, dass beide Züge zur Zeit $t = 0$ den Zwischenhalt (bei $x = 0$) erreichen.

(c) Wie viel Zeit verliert Zug A durch den Zwischenhalt gegenüber Zug B?

Aufgabe 2.4: Beschleunigungen (5+5 Punkte)

Ein Körper bewegt sich auf einer Bahn

$$\mathbf{r}(t) = (\rho\cos(\omega t), \rho\sin(\omega t), z_0)$$

mit beliebigen Konstanten ρ, ω und z_0.

(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ sowie die Beträge $|\mathbf{r}(t)|$, $|\mathbf{v}(t)|$ und $|\mathbf{a}(t)|$.

(b) Skizzieren Sie jeweils für $t = 0$ und $t = \frac{\pi}{2\omega}$ die Vektoren $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ und $\mathbf{a}(t)$ und charakterisieren Sie ihre relative Lage.

Aufgabe 2.5: Produktregel (5+5 Punkte)

Es seien $\mathbf{a} = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ und $\mathbf{b} = (b_1(t), b_2(t), b_3(t))$ Vektoren mit differenzierbaren Komponenten $a_i(t)$ und $b_i(t)$ bezüglich einer Standardbasis. Zeigen Sie

(a) die Produktregel für das Skalarprodukt: $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \dfrac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \dfrac{d\mathbf{b}}{dt}$ und

(b) die Produktregel für das Vektorprodukt: $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \dfrac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \dfrac{d\mathbf{b}}{dt}$.