1 Klausurrelevante Formeln, Gesetze und Themen

Inhaltsverzeichnis

1.1 Gesetze

1.1.1 Die Newton'schen Axiome

1. Newton'sche Axiom - Trägheitsprinzip Ein Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit geradlinig gleichförmig weiter, wenn keine resultierende äußer Kraft wirkt. Es gilt:

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$$

2. Newton'sche Axiom - Aktionsprinzip Kraft ist gleich Masse mal Beschleunigung.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

3. Newton'sche Axiom - Reaktionsprinzip Kräfte treten immer paarweise auf. Wirkt eine Kraft von einem Körper A auf einen Körper B, so wirkt eine gleich große, entgegengesetzte Kraft von B auf A.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

1.1.2 Die Keppler'schen Gesetze

1. Keppler'sche Gesetz Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne, wobei die Sonne in einem der Brennpunkte der Ellipse steht.

2. Keppler'sche Gesetz Der Radiusvektor (Verbindungslinie Planet-Sonne) von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleicher Zeit gleiche Flächen.

3. Keppler'sche Gesetz Die Quadrate der Umlaufzeiten U der Planeten um die Sonne verhalten sich wie die Kuben der großen Bahnhalbachsen.

$$U^2 \propto r^3$$

$$\frac{U^2}{r^3} = \text{const.}$$

1.1.3 Superpositionsprinzip

Bewegungen, Beschleunigungen und Kräfte überlagern sich ohne Beeinflussung und können deshalb als Vektoren addiert werden. Das Superpositionsprinzip ist ein Ausdruch für die Isotropie und Homogenität des euklidschen Raumes.

1.1.4 Energieerhaltung

Die Energie eines Systems bleibt erhalten, solange keine Energie das System verläßt oder hinzukommt. Es gilt:

$$E_{kin} + E_{pot} = E_{ges} = \text{const.}$$

Speziell gilt für den elastischen Stoß:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_2'}^2$$

1.1.5 Impulserhaltung

In einem System auf das von außen keine Kräfte wirken, bleibt der Impuls erhalten. Aus $\vec{F} = 0$ folgt $\vec{p}$ konstant. Speziell für den elastischen Stoß gilt:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

Anmerkung zum Impuls: Die Änderung des Impules bezeichnet man als Kraftstoß, es gilt:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_1^2 \vec{F}dt$$

1.2 Formeln

1.2.1 Transformationsformeln für Polarkoordinaten

Kartesisch in Polar	Polar in Kartesisch
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$	$x = \rho\cos\varphi$
$\tan\varphi = \frac{y}{x}$	$y = \rho\sin\varphi$

1.2.2 Transformationsformeln für Zylinderkoordinaten

Kartesisch in Zylinder	Zylinder in Kartesisch
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$	$x = \rho\cos\varphi$
$\tan\varphi = \frac{y}{x}$	$y = \rho\sin\varphi$
$z = z$	$z = z$

1.2.3 Transformationsformeln für Kugelkoordinaten

Kartesisch in Kugel	Kugel in Kartesisch
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$
$\tan\vartheta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$	$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$
$\tan\varphi = \frac{y}{x}$	$z = r \cos\vartheta$

1.2.4 Translation - Rotation

Translation			Rotation		
Verschiebung	$\vec{r}$	$[m]$	Verdrehung	φ	$[rad]$
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	$\left[\frac{m}{s}\right]$	Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega}$	
Beschleunigung	$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	Winkelbeschleunigung	$\frac{d\vec{\omega}}{dt}$	
Masse	m	$[kg]$	Trägheitsmoment	θ	$[kgm^2]$
Impuls	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\left[kg\frac{m}{s}\right]$	Drehimpuls	$\vec{L} = \theta\vec{\omega}$	
Kraft	$\vec{F} = m\vec{a}$	$[N]$	Drehmoment	$\vec{M}$	$[Nm]$
Arbeit	$\int_1^2 \vec{F} d\vec{r}$	$[Nm]$	Dreharbeit	$\int_1^2 \vec{M} d\varphi$	$[Nm]$
Kinetische Energie	$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$		Rot. Energie	$\frac{1}{2}\theta\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\theta}$	
	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$			$\vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	
Lineare Schwingung	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$		Drehschwingung	$T = 2\pi\sqrt{\frac{\theta}{D}}$	

1.3 Arbeit, Energie und Leistung

1.3.1 Energie

Energie bedeutet die Fähigkeit Arbeit zu leisten, d.h. Energie ist der 'Vorrat' an Arbeit. Die Einheit von Energie ist die gleiche wie die der Arbeit:

$$[\text{Arbeit}] = [\text{Energie}] = [Nm] = \left[kg\frac{m^2}{s^2}\right]$$

Die Energie setzt sich innerhalb eines konservativen Kraftfelds (Erde mit Anziehungskraft) aus der **potentiellen** und **kinetischen** Energie zusammen. Es gilt:

$$E_{pot} + E_{kin} = E_{ges} = \text{const.}$$

Die potentielle Energie eines System in einem Punkt i läßt sich wiefolgt errechnen.

$$E_{pot}(i) = \left| -\int_P^i \vec{F} d\vec{s} \right|$$

Im Kraftfeld der Erde kann man die potentielle Energie eines Körpers durch folgende Formel errechnen.

$$E_{pot} = mgh$$

Die kinetische Energie ist die Energie, welche sich in einem bewegten Körper vorhanden ist. Sie ist gegeben durch:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$$

1.3.2 Arbeit

Arbeit ist die Veränderung der Energie eines Körpers. Verändert man zum Beispiel die potentielle Energie (Hubarbeit) eines Körpers so gilt:

$$E_{pot}(h + \Delta h) - E_{pot}(h) = W = mg\Delta h$$

Für die Veränderung der kinetischen Energie gilt analog:

$$E_{kin}(t + \Delta t) - E_{kin}(t) = W = \frac{1}{2} m \Delta v^2$$

1.3.3 Leistung

Leistung ist gleich Arbeit pro Zeit. Falls die Arbeit unabhängig von der Zeit ist, so gilt

$$N = \frac{W}{t}$$

Falls die Arbeit von der Zeit ist, so gilt

$$N(t) = \frac{dW(t)}{dt}$$

Die Leistung ist dann gerade die Ableitung der Arbeit nach der Zeit.

1.4 Elastischer und inelastischer Stoß

1.4.1 Gerader elastischer Stoß

Zwei Körper (Massepunkte) treffen auf einer Geraden aufeinander. Sie haben jeweils die Masse m_1, m_2 sowie die Geschwindigkeit v_1, v_2. Da die Geschwindigkeiten nur auf einer Geraden laufen, können wir mit den Beträgen rechnen, wobei dei Richtung nach rechts positives und die nach links negatives Vorzeichen hat. Es gilt die Impulserhaltung:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Da es sich um einen elastischen Stoß handelt, bleibt die kinetische Energie erhalten, es gilt der Energieerhaltungssatz.

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2'}^2$$

Wir haben also zwei Gleichungen und zwei unbekannte Variablen v_1' und v_2'. Man kann die beiden Endgeschwindigkeiten errechnen.

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Man kann nun folgende Spezialfälle betrachten:

$$m_1 = m_2 : \quad v_1' = v_2 \text{ und } v_2' = v_1$$

$$v_2 = 0 : \quad v_1' = -\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 \text{ und } v_2' = -\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1$$

Die Schwerpunktgeschwindigkeit bleibt wegen des Impulserhaltungssatzes erhalten.

1.4.2 Gerader Inelastischer Stoß

In der klassischen Mechanik kann nur der total unelastische Stoß gelöst werden. Für die Geschwindigkeit nach dem Stoß gilt:

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Merke: Impulserhaltungssatz gilt weiterhin. Kinetische Energie wandelt sich teilweise um.

1.5 Raketen

Bei einer Rakete gilt der Impulserhaltungssatz.

$$\vec{p}(t) = \vec{p}(t + \Delta t)$$

Genauer, die Rakete hat zum Zeitpunkt t folgenden Impuls:

$$\vec{p}(t) = m(t) \cdot \vec{v}(t)$$

Nach verstreichen einer Zeit Δt gilt folgendes:

$$\vec{p}(t + \Delta t) = \underbrace{(m(t) - \Delta m)(\vec{v}(t) + \Delta \vec{v})}_{\text{Impuls der Rakete}} + \underbrace{\Delta m \vec{v}'}_{\text{Impuls des Gases}}$$

Durch Einsetzen von $\vec{p}(t)$ und Auflösen dieser Gleichung erhält man:

$$m(t) \cdot \Delta \vec{v} = \Delta m \underbrace{(\vec{v}(t) - \vec{v}')}_{\vec{v}_b}$$

Es gilt also folgende Beziehung:

$$\Delta \vec{v} = -\frac{\Delta m}{m(t)} \vec{v}_b$$

Lassen wir Δt infinitesimal klein werden, so geht die Gleichung in

$$d\vec{v} = -\frac{dm}{m(t)} \vec{v}_b$$

über. Jetzt können wir durch Integration folgende allgemeine Beziehung ausrechnen, wobei m_E die Masse der Rakete am Ende der Beschleunigung und m_A ihre ursprüngliche Masse ist.

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_b \ln\left(\frac{m_E}{m_A}\right) = -\vec{v}_b \ln\left(\frac{m_A}{m_E}\right)$$

Bezeichen wir m_R als die Masse der Rakete und m_T die Masse des Treibstoffs, so erhalten wir folgende Gleichung.

$$\vec{v}(t) = -\vec{v}_b \ln\left(\frac{m_R + m_T}{m_R}\right) = -\vec{v}_b \ln\left(1 + \frac{m_R}{m_R}\right)$$

1.6 Schwerpunktsystem

Das Schwerpunktsystem wird so gewählt, daß der Gesamtimpuls, welcher konstant ist (Impulserhaltung), null ist. Den Ortsvektor des Schwerpunkts $\vec{r}_s$ im Laborsystem erhält man durch folgende Gleichung.

$$\vec{r}_s = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} + C \quad C = \text{const.}$$

Die Geschwindigkeit des Schwerpunktsystems relativ zum Laborsystem erhält man durch:

$$v_s = \frac{m_1 v_1 + m_2 + v_2}{m_1 + m_2}$$

Da der Gesamtimpuls des Schwerpunktsystems null ist muss gelten (im Schwerpunktssystem):

$$\vec{p_1} = -\vec{p_2} \text{ und } \vec{p_1}' = -\vec{p_2}'$$

Der Gesamtimpuls im Laborsystem hingegen ist der konstante Schwerpunktimpuls $\vec{p}_s$.

1.7 Rotation (Drehbewegung)

1.7.1 Winkelgeschwindigkeit

Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung ändert sich die Entfernung des Massenpunktes zu dem Mittelpunkt des Kreises nicht. Die Richtung des Bahngeschwindigkeitsvektors $\vec{v}$ hingegen, ändert sich ständig. Dieser steht senkrecht zum Ortsvektor $\vec{r} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (r,\varphi)_{\text{pol}}$. Die Winkelgschwindigkeit ω errechnet man durch folgenden Zusammenhang.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{const.}$$

Der Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit und der Bahngeschwindigkeit ist gegeben durch:

$$v = r\omega$$

Es gelten analog zur geradlinigen Bewegung folgende Gleichungen:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\dot{\omega}t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

$$\omega(t) = \dot{\omega}t + \omega_0$$

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$$

Letzteres ist die sogenannte Winkelbeschleunigung. Ändert sich also die Bahngeschwindigkeit, so ändert sich auch die Winkelgeschwindigkeit.
Wie sieht das alles mit Vektoren aus? Der Vektor $\vec{\omega}$ ist orthogonal zur Rotationsebene und parallel zur Drehachse. Es gilt die 'Rechte-Hand-Regel' (Daumen = $\vec{\omega}$; Zeigefinger = $\vec{r}$; Mittelfinger = $\vec{v}$. Es gilt

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

1.7.2 Zentripetalbeschleunigung und Zentripetalkraft

Die Zentripetalkraft hält den Massenpunkt auf seiner Umlaufbahn. Es wirkt als eine ständige Beschleunigung auf das Teilchen, welche es wieder zurück auf die Bahn lenken, würde diese Beschleunig nicht wirken, so würde der Körper die Bahn verlassen (Mond kreist um Erde; Steinschleuder). Für die Zentripedalkraft, welche antiparallel zu $\vec{r}$ steht, gilt:

$$\vec{a}_{zp} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Für die Beträge gilt:

$$a_{zp} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

Aus dem 2. Newton'schen Axiom folgt, daß es eine Kraft $\vec{F}_{zp}$ geben muss.

$$\vec{F}_{zp} = m\vec{a}_{zp} = -m\omega^2\vec{r}$$

Diese Kraft nennt man Zentripedalkraft. Da $\vec{F}_{zp} \perp \vec{v}$ gilt, leistet $\vec{F}_{zp}$ keine Arbeit.

1.7.3 Schein- bzw. Trägheitskräfte

Zentrifugalkraft Auf einen Beobachter, welcher sich in dem rotierenden Körper befindet, muss eine Scheinkraft wirken, welche die Zentripetalkraft ausgleicht, da dieser sich, wenn er die Zentripetalkraft spüren würde (Rotation mit Faden), sich nicht bewegen würde. Es gilt:

$$\vec{F}_{zf} = -\vec{F}_{zp} = m\omega^2\vec{r}$$

$$\vec{F}_{zf} = m\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$$

Coriolis-Kraft Die Coriolis-Kraft tritt bei Bewegungen im rotierenden System in radialer ($\parallel \vec{r}$) Richtung. Es gilt ($\vec{u}$ = Geschwindigkeit in radialer Richtung):

$$a_c = 2u\omega$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{u} \times \vec{\omega}$$

$$\vec{F}_c = 2m\vec{u} \times \vec{\omega}$$

1.7.4 Drehmoment und Drehimpuls

Drehmoment Um einen Körper in eine kreisförmige Bewegung zu versetzen benötigt man eine Kraft und einen Hebelarm. Das Drehmoment $\vec{M}$ entspricht der Kraft $\vec{F}$ bei der Translation. Es gilt:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Drehimpuls Analog zum Impuls bei der Translation, kann man den Drehimpuls definieren. Es gilt

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Weiterhin gilt folgender Zusammenhang:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

1.8 Gravitation

Die Graviation verursacht die Gewichtskraft auf der Erde. Aus den Keppler'schen Gesetzen läßt sich das Gravitationsgesetz herleiten.

$$\vec{F}_R \sim m_P \cdot \frac{1}{r^2}$$

Die Gravitationskraft zwischen zwei Massen kann man berechnen.

$$F_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

1.9 Potentielle Energie und Potential im Gravitationsfeld

Die Gravitationskraft ist eine konservative Kraft. Zur Bestimmung der potentiellen Energie eines Punktes gilt folgende Gleichung:

$$U(r_i) = -\gamma m m' \frac{1}{r_1}$$

Das Gravitationspotential ist definiert durch

$$U(r_i) = V(r_i) \cdot m'$$

Es gilt also

$$V(r) = -\gamma m \frac{1}{r}$$

Bleibt r konstant, so wird keine Arbeit verrichtet. Das Gravitationspotential ändert sich also nicht. Man spricht von der Verschiebung auf einer Äquipotentialfläche. Die Kraft welche wirkt, steht senkrecht auf diesen Äquipotentialflächen und zeigt in die Richtung von m' (Erde). Man führt für diese Kraftlinien den Begriff der Feldstärke ein. Es gilt

$$\vec{E} = - = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z$$

$$E_i = -\frac{dV}{di}$$